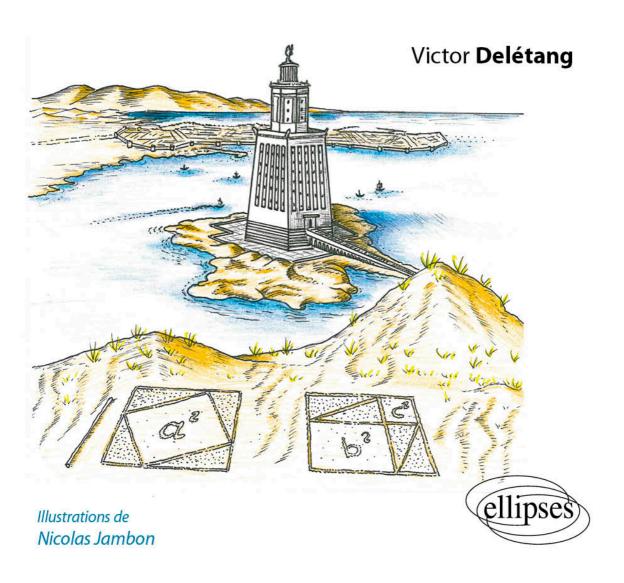
FIGURES & SOLIDES De récits en théorèmes



LA MAISON D'EUGLIDE

► Alexandrie, Égypte, 290 avant J.-C.

Ce matin, Euclide est heureux de constater que les esclaves sont bien au travail sur le chantier de sa nouvelle demeure, dans le quartier grec d'Alexandrie, en Égypte. Le soleil est déjà haut mais la chaleur n'est pas encore écrasante, et une petite brise marine bienvenue vient rafraîchir les hommes qui peinent à décharger des blocs de pierre.

Depuis sa future demeure, Euclide apercevra le port d'Alexandrie à l'entrée duquel, tel un mirage flottant sur l'horizon de flots azur, se dresse le chantier du futur phare¹; au-delà, s'étend l'immense Mer² et, par-delà encore, les terres de sa Grèce natale. Ptolémée Ier, Basileus³ d'Égypte, a décidé la construction de cet ouvrage, destiné autant à guider les bateaux vers sa nouvelle capitale qu'à la faire rayonner dans le monde. C'est aussi à sa demande qu'Euclide est venu s'installer à Alexandrie, séduit par la légende militaire du bras droit d'Alexandre le Grand autant que par ses projets « pharaoniques » de Phare et, plus encore, de Grande Bibliothèque...

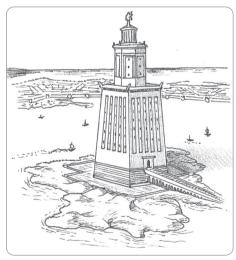


Figure 1 - Un Phare pour éclairer le monde

Le mot « phare » dérive justement du nom de l'île qui abritait celui d'Alexandrie, l'île de « Pharos ».

^{2.} Il s'agit de la Méditerranée, bien sûr.

^{3.} Basileus signifie « Roi » en grec. Ptolémée qui était macédonien, comme Alexandre le Grand, a logiquement pris ce titre quand il a « hérité » de l'Égypte à la mort d'Alexandre. Son fils Ptolémée II prendra, lui, le titre de Pharaon, comme les souverains de l'Égypte antique.

La surface au sol a enfin été terrassée et le plan carré de la future maison d'Euclide commence à apparaître clairement. Sous les ordres de l'architecte Oikodomos, les esclaves délimitent à l'aide de ficelles tendues entre des piquets les emplacements des futures pièces, autour de la cour centrale. Euclide est heureux de voir enfin se concrétiser les formes qu'il a luimême conçues puis dessinées. Les solides de son imagination devenus figures sur le plan, ces formes inspirées elles-mêmes de l'observation de la nature, ne seront donc restés que peu de temps à l'état d'idées ou de dessin.

Euclide connaît un peu l'art de la construction : il sait que le terrassement puis les fondations y sont essentiels. Même si ces étapes ne sont pas les plus spectaculaires aux yeux du profane, aucun édifice, si bien conçu soit-il, ne saurait résister au temps sans de solides bases ou sur un terrain bancal. De même, les mathématiques ne peuvent se construire qu'après un travail fastidieux et parfois ingrat de préparation. Les définitions des nombres, points, droites sont comme les murs de la maison et les propriétés comme les poutres qui les relient. Mais que les postulats⁴ qui fondent les mathématiques soient négligés et bien vite l'on verra les murs se fissurer, les poutres s'écrouler puis l'édifice tout entier réduit en poussière.

« Qu'est-ce que tu fabriques, toi là-bas? »

Oikodomos vient d'interpeller ainsi un esclave de haute taille à la peau très claire, un de ces barbares venus du Nord, terribles au combat mais qui dépérissent dans les travaux civils. On les emploie en général dans les mines ou les carrières, où leur force et leur résistance les rendent très efficaces, le temps que leur moral s'affaisse et qu'ils deviennent tout à fait inutiles. Celui-ci devait tendre une ficelle, matérialisant le mur extérieur Nord, perpendiculairement à celle déjà tendue pour le mur extérieur Ouest. Et il est bien en train de tendre la ficelle... mais en une perpendiculaire très approximative ! Oikodomos s'approche et ramasse au passage la corde à treize nœuds, présente sur le chantier ainsi que sur tous les chantiers d'Égypte depuis des centaines d'années. Euclide, évidemment intéressé, l'a suivi. S'ensuit une explication de l'utilisation de l'outil :

« Regarde-moi ! » intime Oikodomos, s'accompagnant du geste pour communiquer. Tout en continuant ses explications, il s'exécute :

« Tu prends la corde et tu places une première portion le long du mur Ouest de façon que le quatrième nœud soit au coin Nord-Ouest. Tu tends la corde et tu fixes le premier et le quatrième nœud à l'aide d'un piquet! ».

Il a brandi chaque nœud et les a ostensiblement comptés. Le grand barbare opine du chef sans avoir l'air de comprendre où Oikodomos veut en venir.

^{4.} Aujourd'hui nous dirions « axiomes ».

1

« Maintenant, le plus délicat... il faut réussir à tendre le reste de la corde avec un piquet au huitième nœud de façon que le treizième nœud vienne refermer un triangle avec le premier nœud. Regarde comment je fais! ».

Oikodomos tend la corde et, à l'aide d'un troisième piquet au huitième nœud conjugué à son expérience, finit rapidement par refermer son triangle... rectangle!

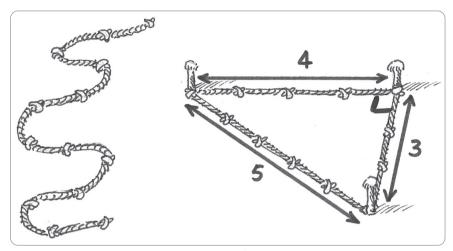


Figure 2 - Corde à 13 nœuds

« Allez à toi! Essaye! ».

Oikodomos défait rapidement son triangle et tend la corde au barbare qui s'en saisit à son tour et s'exécute : miracle, il a bien compris comment s'en servir! Euclide lit dans ses yeux un mélange d'incompréhension et de fascination : ce savoir égyptien ancestral lui semble magique!

C'est pour cette raison qu'Euclide a entrepris la rédaction de ses Éléments, compilation de tous les savoirs mathématiques de son époque. Pour que les fondations et la structure des mathématiques soient enfin solides, comme celles de sa maison ou celles de la future Grande Bibliothèque. Mais aussi pour que tous, depuis l'instruit Oikodomos jusqu'à cet esclave inculte, puissent enfin comprendre que la corde à treize nœuds n'a rien de magique. En fait, son « pouvoir » se déduit des cinq postulats de la géométrie : il n'est qu'un cas particulier de la proposition 48 du livre I de ses Éléments, qu'il vient justement de finir de rédiger :

« Si, dans un triangle, le carré sur l'un des côtés est égal aux carrés sur les deux côtés restants du triangle, l'angle contenu par les deux côtés restants du triangle est droit »⁵.

^{5.} Nous appelons aujourd'hui cette proposition « réciproque du théorème de Pythagore » ; voir le chap. 3 sect. 5 ss-sect. 2.

Ici le carré du grand côté est de grandeur⁶ $5 \times 5 = 25$ et les carrés des deux autres côtés sont de grandeur $4 \times 4 = 16$ et $3 \times 3 = 9$; comme 16 + 9 = 25, le premier est bien égal aux deux autres et les côtés perpendiculaires.

Bien sûr, il en va des mathématiques comme de la construction : elles demandent des efforts ! Comme ces esclaves qui peinent en plein soleil sur le chantier de la maison d'Euclide, celui qui voudra, à sa suite, reconstruire l'édifice des mathématiques en lisant ses *Éléments* devra peiner. Le soleil ne brûlera pas sa peau, il n'usera pas ses mains sur l'arête des pierres et ne courbera pas le dos sous leur charge mais il devra accepter de lire et relire les passages difficiles, de ne pas trouver le sommeil quand les idées nouvelles danseront sous son crâne et même parfois de perdre la faim, quand le vertige de la connaissance l'aura saisi.

Esclave, architecte, ou même Basileus, le chemin est identique et c'est ce chemin qu'Euclide trace patiemment dans son ouvrage. Pourtant il ne se considère pas comme un explorateur ou un découvreur de contrées nouvelles mais plutôt comme un maïeuticien⁷, tel l'illustre Socrate en son temps. Il ne fait que donner naissance, sous une forme nouvelle, à toutes ces idées millénaires, ces relations entre nombres et figures qu'avant lui bien d'autres ont découvertes, établies et parfois démontrées. Scribes de Babylone et d'Égypte, Pythagoriciens et philosophes grecs, Euclide a mis ses pas dans les leurs, il a refait leur chemin et l'a balisé pour ceux qui le suivront.

Quelques mois plus tard, le moment est venu d'inaugurer la maison. Parmi les nombreux invités, marchands grecs, artisans de la construction, philosophes et magistrats, Euclide y retrouve avec surprise l'esclave! Oikodomos lui explique qu'il a découvert chez ce barbare – désormais nommé Télégonos, en référence à ses origines lointaines⁸ – une soif d'apprendre étonnante! Des subtilités de la langue grecque jusqu'aux techniques de construction les plus élaborées, rien ne semble assouvir sa vive intelligence.

« Un jour peut-être, Oikodomos, satisfait de ses services, décidera de l'affranchir, et de lui rendre une partie de sa liberté – pense Euclide. Mais, sans même attendre la décision de son maître, par son envie de comprendre et de progresser sur le chemin du savoir, ce Télégonos a lui-même débuté son affranchissement! »

^{6.} Ici la grandeur désigne l'aire du carré construit sur le côté. Si l'unité de longueur est la distance entre deux nœuds de la corde, cette aire est mesurée en unité au carré.

^{7. «} Maïeuticien » signifie « accoucheur » en grec. Le philosophe Socrate, plus de cent ans avant Euclide, voulait par ses questions faire naître de l'esprit de ses interlocuteurs une part de Vérité ou de Beauté.

^{8.} En grec ancien, « qui est né au loin ».

Une maison nouvelle s'élève désormais à Alexandrie, la nouvelle capitale d'Égypte; bientôt le Phare y attirera les marins et les marchands et la Grande Bibliothèque les savants. Mais c'est de l'œuvre d'un homme que va naître une science nouvelle, une science faite de postulats et de raisonnements, une science qui va éclairer le monde pour les siècles à venir⁹.

g. D'autres mathématicien(ne)s illustres vécurent à Alexandrie dans l'Antiquité, et la présence de la Grande Bibliothèque n'y est pas étrangère. On peut citer Eratosthène juste après Euclide, puis, quelques siècles plus tard, Claude Ptolémée (retrouvez-les au chap. 4 sect. 5 ss-sect. 2), Diophante d'Alexandrie ou Théon d'Alexandrie et sa fille Hypatie, à la destinée tragique.

POINTS ET DROITES

Avant même de décrire les points et les droites, les parallélogrammes et les cercles, d'apprendre à les tracer ou à les mesurer, il nous faut passer quelques lignes à expliquer d'où viennent tous ces objets géométriques...

En fait, les figures, des plus élémentaires aux plus complexes, du simple point à la cycloïde, sont des abstractions¹: on ne rencontre pas, dans la nature, de point infiniment petit ni de ligne parfaitement droite et, encore moins, infinie dans les deux directions. L'abstraction est une manifestation de notre intelligence et est à la base même des mathématiques: c'est grâce à elle que le langage regroupe des objets ou des sensations similaires sous un seul et même mot; toutes les figures à trois côtés droits deviennent des « triangles » et si elles sont de dimensions importantes elles sont « grandes ». C'est également grâce à l'abstraction que les mathématiques relient ces objets par des propriétés et des théorèmes...

Bien sûr, ces abstractions nous sont inspirées par le monde bien concret qui nous entoure, ou au moins par l'image que nos sens nous en donnent. En effet, lorsque nous bougeons, nous ressentons ce qu'est une distance ou un angle ; nous pouvons aussi mesurer des longueurs avec une règle, des angles avec un rapporteur, construire des perpendiculaires avec un fil à plomb ou une équerre et des cercles avec un compas. Il ne faut d'ailleurs surtout pas oublier que la géométrie est née, avant tout, de besoins pratiques : construire une maison, un temple ou délimiter un champ. C'est pourquoi les outils y ont joué un rôle important, un peu comme les abaques ou les machines à calculer dans l'histoire des nombres : réfléchir sur le moyen de construire une figure permet souvent de mieux la comprendre et de se poser des questions intéressantes la concernant!

Plus encore que les nombres, les figures ont contraint les mathématiciens, dès l'antiquité, à s'interroger : comment définir le point, la droite, l'angle droit puis comment démontrer les propriétés du parallélogramme ou du carré ?

^{1.} Tout comme les nombres d'ailleurs...

La grande œuvre d'Euclide – dont on sait peu de choses excepté qu'il vécut à Alexandrie vers 300 avant J.-C. – a probablement été de compiler des connaissances antérieures et de les rassembler dans ses *Éléments*, sous la forme d'une construction logique, qui allait devenir le modèle en mathématiques, jusqu'à nos jours. Cette construction est basée sur les éléments suivants :

- les **postulats** ou **axiomes** sont des règles qu'on ne peut pas démontrer, ce sont les fondations de notre cathédrale ;
- les **définitions** forment les murs de l'édifice ;
- les propriétés, théorèmes etc. sont le reste de la structure, les poutres et les poteaux qui relient les objets entre eux;
- le ciment des **démonstrations** tient le tout ensemble.

Que l'on change un axiome ou une définition et nous construisons une géométrie différente... à défaut d'aborder les géométries non-euclidiennes, nous nous amuserons brièvement au chap. 2 sect. 3 à modifier la notion de distance et à observer ce qui se passe alors!

COLLÈGE

1 Plan

La géométrie « de base » que nous allons étudier se déroule dans un plan, dont la forme est équivalente à la surface d'une caverne préhistorique, à celle d'une feuille – de papyrus ou de papier –, d'un tableau de salle de classe ou à celle d'un écran d'ordinateur. Mais le **plan** de la géométrie, contrairement aux exemples ci-dessus, est, lui, infini dans toutes ses directions : cette première abstraction est sans doute plus facile à comprendre qu'à imaginer ou à formaliser.

Contentons-nous donc pour l'instant de dire que, dans ce plan, toutes les directions jouent le même rôle et qu'un objet y possède une forme et une position. Selon les propriétés géométriques étudiées nous nous intéresserons plutôt à l'une ou à l'autre : les formes pour les propriétés des figures et leurs positions pour les transformations que nous nommerons isométries ou similitudes.

2 Points COLLÈGE

Commençons par l'élément le plus simple, la brique élémentaire de la géométrie : le **point**.