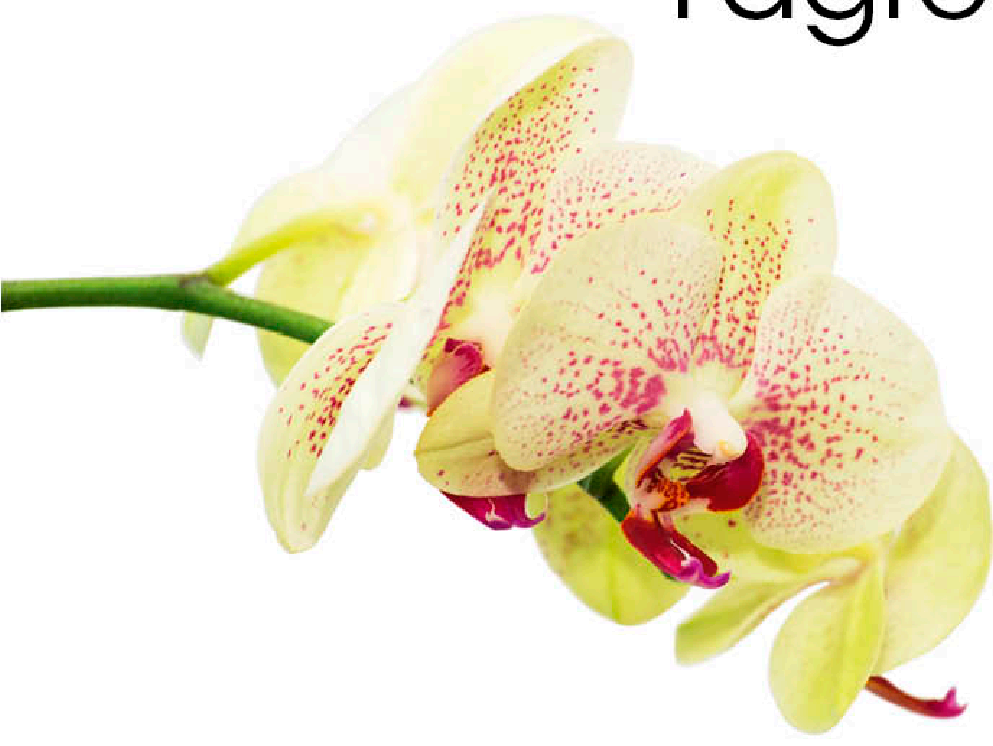
Mathieu Kieffer

Analyse et probabilités : 39 leçons pour l'agrégation



ellipses

Chapitre 1

Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications

Pré-requis

1. Fonction lipschitzienne.
2. Théorème des valeurs intermédiaires.
3. Théorème de convergence monotone.
4. Formule de Taylor-Lagrange.
5. Généralités sur les espaces vectoriels.

1.1 Suites récurrentes d'ordre 1

Définition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée une suite récurrente d'ordre 1.

Proposition 2. *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite l appartient à I et vérifie $f(l) = l$. Le nombre l est alors appelé un point fixe de f.*

Démonstration. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Or I est fermé. Donc $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in I$. De plus, f est continue, donc $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = f(l)$. $\square$

Remarque. Si la fonction f n'admet pas de point fixe sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Proposition 3. *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit l un point fixe de f. S'il existe un intervalle $J \subset I$ contenant l et un réel $k \in [0;1[$ tels que :*

$$\forall\, x \in J,\ |f(x) - l| \leqslant k\,|x - l|$$

Alors, pour tout $u_0 \in J$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démonstration. $u_0 \in J$ et $\forall\, x \in J$, $|f(x) - l| \leqslant k\,|x - l|$. Donc, par une récurrence immédiate, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n \in J \\ |u_n - l| \leqslant k^n\,|u_0 - l| \end{cases}$. Ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puisque $k \in [0;1[$. □

Remarque. La conclusion est identique lorsque f est k-lipschitzienne sur I avec $k \in [0;1[$. En particulier, lorsque f est dérivable sur I et que sa dérivée est bornée sur I par un réel $k \in [0;1[$.

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{4}\cos(u_n) \end{cases}$ est bien définie car $[0;1]$ est stable par f.

La fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = x - f(x)$ est continue, strictement croissante sur $[0;1]$. De plus, $g(0) < 0$ et $g(1) > 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution l sur $[0;1]$.

La fonction f est $\frac{3}{4}$-lipschitzienne, puisqu'elle est dérivable et que sa dérivée est bornée par $\frac{3}{4}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers l.

De plus, on a la majoration : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - l| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Proposition 4. *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $f(x) - x$ garde un signe constant sur I, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*

Démonstration. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. D'où le résultat. □

Proposition 5. *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante sur I, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*

Démonstration. Si $u_0 \leqslant u_1$, alors $u_1 = f(u_0) \leqslant f(u_1) = u_2$ et, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Le raisonnement est identique si $u_0 \geqslant u_1$. □

Remarque. Dans les deux cas précédents, il ne reste plus qu'à essayer de majorer ou minorer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour établir sa convergence.

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \end{cases}$ est bien définie car $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

Graphiquement, il semblerait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante, et majorée si, et seulement si, $u_0 \leqslant 1$. Justifions-le.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant x$. Donc, d'après la proposition 4, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Le seul point fixe de f est 1.

Si $u_0 > 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger. Si $u_0 \leqslant 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, puisque $(u_n \leqslant 1) \Rightarrow (u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(1) = 1)$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est 1.

Proposition 6. *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est décroissante sur I, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposés.*

Démonstration. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = (f \circ f)(u_{2n})$. Or, $f \circ f$ est croissante sur I. Donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. De la même manière, on démontre que $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Comme, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et f est décroissante sur I, la croissance (la décroissance) de l'une entraîne la décroissance (la croissance) de l'autre. □

Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0;2] \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \end{cases}$ est bien définie car $[0;2]$ est stable par f.

L'unique point fixe de f est 1, donc si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers 1. Comme f est décroissante sur $[0;2]$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. De plus, elles sont bornées, donc convergentes. Leurs limites sont des points fixes de $f \circ f$. Nous pourrions montrer que 1 est le seul point fixe de $f \circ f$, ce qui prouverait la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 1, mais nous allons démontrer directement cette convergence.

La fonction f n'est pas lipschitzienne sur $[0;2]$ mais, pour tout $x \in [0;2]$, $f(x) - 1 = \frac{1-x}{1+\sqrt{2-x}}$. Ainsi, pour $\alpha < 2$, on a : $\forall\, x \in [0;\alpha]$, $|f(x) - 1| \leqslant k\,|x - 1|$ avec $k := \frac{1}{1+\sqrt{2-\alpha}} < 1$.

Si $1 \leqslant u_0 < 2$, d'après la proposition 3, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1.

Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$, alors $1 \leqslant u_1 \leqslant \sqrt{2}$ et on est ramené au premier cas.

Si $u_0 = 2$, on a $u_1 \leqslant 1$, et on est ramené au deuxième cas.

Proposition 7. *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur I telle que $f(I) \subset I$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in I$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit a un point fixe de f. Si f est dérivable en a et si $|f'(a)| > 1$, alors la suite converge vers a si, et seulement si, elle est stationnaire.*

Démonstration. $\Leftarrow$: supposons qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$. Alors évidemment, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

$\Rightarrow$: supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas stationnaire. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$. Ainsi :

$$\frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} = \frac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(a)$$

On en déduit donc, qu'à partir d'un certain rang, on a $\left|\frac{u_{n+1}-a}{u_n-a}\right| \geqslant 1$, ce qui prouve que la suite $(|u_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle ne peut donc converger vers 0. D'où la contradiction. $\square$

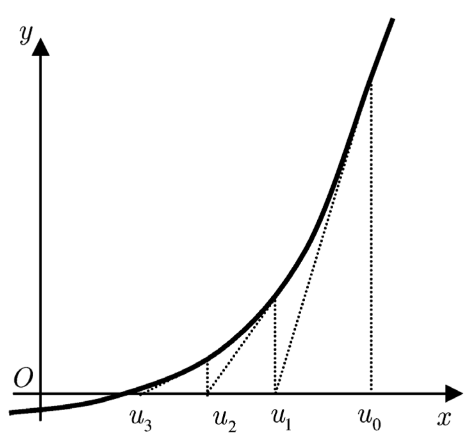
Exemple. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{1+2u_n^2} \end{cases}$ est bien définie car $\mathbb{R}_+$ est stable par f.

L'unique point fixe de f est 1, donc si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est vers 1. De plus, $|f'(1)| > 1$. Si $u_0 = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Si $u_0 > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

1.2 Méthode de Newton

Remarque. On souhaite résoudre l'équation $F(x) = 0$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, où F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. L'idée est la suivante :

- Soit $u_0 \in I$. La tangente au graphe de F au point $(u_0, F(u_0))$ a pour équation : $y = F'(u_0)(x - u_0) + F(u_0)$. Si $F'(u_0) \neq 0$, cette tangente coupe l'axe des abscisses au point $u_1 := u_0 - \frac{F(u_0)}{F'(u_0)}$.
- Repartons alors de ce point u_1. Considérons la tangente au graphe de F au point $(u_1; F(u_1))$. Elle a pour équation : $y = F'(u_1)(x - u_1) + F(u_1)$. Si $F'(u_1) \neq 0$, cette tangente couple l'axe des abscisses au point $u_2 := u_1 - \frac{F(u_1)}{F'(u_1)}$.
- Etc.



On construit ainsi une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\begin{cases} u_0 = c \in I \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} \end{cases}$.

La fonction $f\,:\,x \longmapsto x - \frac{F(x)}{F'(x)}$ étant continue sur I, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, cela sera vers un point fixe de f, c'est-à-dire vers un point a tel que $F(a) = 0$.

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Résolvons l'équation $x^2 = a$ par la méthode de Newton. Ici, $F(x) = x^2 - a$.

Donc $f(x) = x - \frac{x^2-a}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Cela conduit à la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = c \in \mathbb{R}_+^* \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$, appelée suite de Babylone.

Théorème 8. *(Méthode de Newton) Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $F \in \mathcal{C}^2([\alpha;\beta],\mathbb{R})$ telle que : $F(\alpha) < 0$ et $F(\beta) > 0$, $\forall\, x \in [\alpha;\beta]$, $F'(x) > 0$ et $\forall\, x \in [\alpha;\beta]$, $F''(x) \geqslant 0$. Alors :*

1. *F admet un unique zéro a sur $[\alpha;\beta]$.*
2. *$\forall\, c \in [\alpha;\beta]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = c \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} \end{cases}$ est bien définie et converge vers a en décroissant à partir du rang 1.*
3. *Puisque F' et F" sont continues sur $[\alpha;\beta]$, elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Notons $m_1 := \min\limits_{x\in[\alpha;\beta]} F'(x)$ et $M_2 := \max\limits_{x\in[\alpha;\beta]} F''(x)$. On a :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(u_n - a)^2$$

Démonstration. 1. Puisque F est continue sur $[\alpha;\beta]$ et vérifie $F(\alpha) < 0$ et $F(\beta) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, F admet un zéro dans $[\alpha;\beta]$. En outre, F' est strictement positive sur $[\alpha;\beta]$, donc F est strictement croissante sur $[\alpha;\beta]$, en particulier injective, et donc ce zéro est unique. Notons-le a.

2. Considérons la fonction $f\,:\,x \longmapsto x - \frac{F(x)}{F'(x)}$.

Puisque F' est strictement positive sur $[\alpha;\beta]$, f est bien définie sur $[\alpha;\beta]$ et de classe $\mathcal{C}^1([\alpha;\beta],\mathbb{R})$. En outre, puisque $F(\alpha) < 0$ et $F(\beta) > 0$, on a $f(\alpha) > \alpha$ et $f(\beta) < \beta$. Par conséquent f laisse stable $[\alpha;\beta]$. Il en résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = c \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n - \frac{F(u_n)}{F'(u_n)} \end{cases}$ est bien définie.

La dérivée de f est donnée par $f'(x) = \frac{F(x)F''(x)}{F'(x)^2}$. Donc f est décroissante sur $[\alpha;a]$ et croissante sur $[a;\beta]$, et chacun de ces deux intervalles est stable par f.

Si $u_0 = c \in [a;\beta]$, la croissance de f entraîne la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et comme $f(x) - x = -\frac{F(x)}{F'(x)} \leqslant 0$ pour tout $x \in [a;\beta]$, on a $u_1 \leqslant u_0$ et ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Si $u_0 = c \in [\alpha; a]$, puisque f est décroissante sur $[\alpha; a]$, on a $f(u_0) \geqslant f(a) = a$ et donc $u_1 \in [a; \beta]$. On est ainsi ramené au cas précédent dès le terme u_1.

Il en résulte que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1 et donc convergente puisque minorée. De plus, f est continue donc la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit être un point fixe de f, c'est-à-dire un zéro de F.

3. D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x \in [a; \beta]$, il existe $\gamma \in]a; x[$ tel que :

$$F(a) = F(x) + (a - x)F'(x) + \frac{(a - x)^2}{2}F''(\gamma)$$

Or $F(a) = 0$. D'où $f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = a + \frac{(a-x)^2 F''(\gamma)}{2F'(x)}$. Mais alors, pour tout $x \in [a; \beta]$, $0 \leqslant f(x) - a \leqslant \frac{(a-x)^2 M_2}{2m_1}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \frac{M_2}{2m_1}(u_n - a)^2$. $\square$

Exemple. Revenons à l'équation $x^2 = a$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, $F(x) = x^2 - a$, $F'(x) = 2x$ et $F''(x) = 2$. Les hypothèses du théorème précédent sont donc bien vérifiées. De plus, $m_1 = 2\sqrt{a}$ et $M_2 = 2$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} |u_n - \sqrt{a}|^2$ au lieu de l'attendu : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{a}|$ donné par le fait que f est $\frac{1}{2}$-contractante.

1.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Dans cette section, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 9. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
On note $E_{a,b} := \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\right\}$. Tout élément de $E_{a,b}$ est appelé suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Remarque. Si $b = 0$, alors $((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = au_n \end{cases}\right)$. $E_{a,b}$ est alors l'ensemble des suites géométriques de premier terme $u_0 \in \mathbb{K}$ et de raison $a \in \mathbb{K}$.

Proposition 10. *Soit $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. $(E_{a,b}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_1 = 1 \end{cases}$, en forment une base.*

Démonstration. 1. $\mathbb{K}$-ESPACE VECTORIEL. $E_{a,b} \neq \varnothing$ car la suite nulle appartient à $E_{a,b}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n) = a(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + b(\lambda u_n + v_n)$$

Donc $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$.

2. LIBRE. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites telles que : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_1 = 1 \end{cases}$.

Soient α, $\beta \in \mathbb{K}$ tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\alpha U_n + \beta V_n = 0$. En particulier, on a :

$$\begin{cases} \alpha U_0 + \beta V_0 = 0 \\ \alpha U_1 + \beta V_1 = 0 \end{cases}$$

D'où $\alpha = \beta = 0$. Ainsi, $\{(U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (V_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est libre dans $E_{a;b}$.

3. GÉNÉRATRICE. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a;b}$. Démontrons par récurrence double sur n que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 U_n + u_1 V_n$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, la relation est trivialement satisfaite.

Supposons, pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, que : $\begin{cases} u_n = u_0 U_n + u_1 V_n \\ u_{n+1} = u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1} \end{cases}$.

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a u_{n+1} + b u_n \\ &= a(u_0 U_{n+1} + u_1 V_{n+1}) + b(u_0 U_n + u_1 V_n) \\ &= u_0(a U_{n+1} + b U_n) + u_1(a V_{n+1} + b V_n) \\ &= u_0 U_{n+2} + u_1 V_{n+2} \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{(U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (V_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ engendre $E_{a;b}$. □

Remarque. Pour déterminer $E_{a,b}$, il suffit donc de trouver une base de $E_{a,b}$.

Proposition 11. *Soit $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. On appelle équation caractéristique de $E_{a,b}$ l'équation $x^2 - ax - b = 0$. Alors $(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ si, et seulement si, r est solution de l'équation caractéristique.*

Démonstration. $\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} ((r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}) &\Rightarrow \big(\forall\, n \in \mathbb{N},\ r^{n+2} = a r^{n+1} + b r^n\big) \\ &\Rightarrow \big(r^2 - ar - b = 0\big) \end{aligned}$$

car $r \neq 0$ puisque $b \neq 0$.

$\Leftarrow$:

$$\begin{aligned} \big(r^2 - ar - b = 0\big) &\Rightarrow \big(\forall\, n \in \mathbb{N},\ r^{n+2} = a r^{n+1} + b r^n\big) \\ &\Rightarrow ((r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}) \end{aligned}$$

□

Théorème 12. *(Suites récurrentes linéaires d'ordre 2)*

Soit $(a,b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a;b}$. Soit $x^2 - ax - b = 0$ l'équation caractéristique de $E_{a,b}$.

1. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:*
   (a) *Si $x^2 - ax - b = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$, notées r_1 et r_2, alors $E_{a,b} = \left\{(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$.*
   (b) *Si $x^2 - ax - b = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{C}$, notée r_0, alors $E_{a,b} = \left\{\left(\lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\,,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}$.*
2. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:*
   (a) *Si $x^2 - ax - b = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$, notées r_1 et r_2, alors $E_{a,b} = \left\{(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\,,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$.*
   (b) *Si $x^2 - ax - b = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée r_0, alors $E_{a,b} = \left\{\left(\lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^{n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\,,\, (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$.*
   (c) *Si $x^2 - ax - b = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$, alors $E_{a,b} = \left\{(\rho^n(A.\cos(n\theta) + B.\sin(n\theta)))_{n\in\mathbb{N}}\,,\, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$, où r_1 est l'une des deux solutions complexes de $x^2 - ax - b = 0$, $\rho = |r_1|$ et $\theta = \arg(r_1)$.*

Démonstration. 1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(a) Supposons que $x^2 - ax - b = 0$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$, notées r_1 et r_2. La famille $\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est libre dans $E_{a,b}$ qui est de dimension 2 d'après la proposition 10. Donc $\{(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est une base de $E_{a,b}$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ si, et seulement si, il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

(b) Supposons que $x^2 - ax - b = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{C}$, notée r_0. Alors $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
r_0^{n+1} & = & a r_0^n + b r_0^{n-1} \\
\Leftrightarrow (n+2) r_0^{n+1} & = & a(n+2) r_0^n + (n+2) b r_0^{n-1} \\
\Leftrightarrow (n+2) r_0^{n+1} & = & a(n+1) r_0^n + b n r_0^{n-1} + a r_0^n + 2b r_0^{n-1} \\
\Leftrightarrow (n+2) r_0^{n+1} & = & a(n+1) r_0^n + b n r_0^{n-1} + r_0^{n-1}(a r_0 + 2b) \\
\Leftrightarrow (n+2) r_0^{n+1} & = & a(n+1) r_0^n + b n r_0^{n-1} + r_0^{n-1}\left(\dfrac{a^2+4b}{2}\right) \quad \text{car} \quad r_0 = \dfrac{a}{2} \\
\Leftrightarrow (n+2) r_0^{n+1} & = & a(n+1) r_0^n + b n r_0^{n-1} \quad \text{car} \quad a^2 + 4b = 0
\end{array}$$

Ainsi, $(n r_0^{n-1})_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. Par conséquent, $\left\{(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n r_0^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}\right\}$ est une base de $E_{a,b}$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ si, et seulement si, il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r_0^n + \lambda_2 n r_0^{n-1}$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Les cas (a) et (b) sont identiques aux précédents.
(c) Supposons que $x^2 - ax - b = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Soit $E'_{a,b} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.
D'après le cas 1., $E'_{a,b} = \{(\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\}$.
Démontrons que $E_{a,b} = \{(\lambda_1 r_1^n + \overline{\lambda_1 r_1^n})_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda_1 \in \mathbb{C}\}$:

$\supset$: soit $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. La suite $(\lambda_1 r_1^n + \overline{\lambda_1 r_1^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de $E'_{a,b}$ et est à termes réels, donc est élément de $E_{a,b}$.

$\subset$: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$. Comme $E_{a,b} \subset E'_{a,b}$, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$. Mais :

$$
\begin{aligned}
((u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}) \quad &\Rightarrow \quad \left(\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_1 \in \mathbb{R} \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 \overline{r_1} \in \mathbb{R} \end{cases}\right) \text{car} \quad r_2 = \overline{r_1} \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \overline{\lambda_1} + \overline{\lambda_2} \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 \overline{r_1} = \overline{\lambda_1}\,\overline{r_1} + \overline{\lambda_2} r_1 \end{cases}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \lambda_2 - \overline{\lambda_1} = \overline{\lambda_2 - \overline{\lambda_1}} \\ (\lambda_2 - \overline{\lambda_1})\overline{r_1} = \overline{(\lambda_2 - \overline{\lambda_1})\overline{r_1}} \end{cases}\right) \\
&\Rightarrow \left(\begin{cases} \lambda_2 - \overline{\lambda_1} \in \mathbb{R} \\ (\lambda_2 - \overline{\lambda_1})\overline{r_1} \in \mathbb{R} \end{cases}\right)
\end{aligned}
$$

Or $\overline{r_1} \notin \mathbb{R}$. Donc, $\lambda_2 - \overline{\lambda_1} = 0$. Ainsi :

$$E_{a,b} = \left\{\left(\lambda_1 r_1^n + \overline{\lambda_1 r_1^n}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda_1 \in \mathbb{C}\right\} = \{(2\mathrm{re}(\lambda_1 r_1^n))_{n\in\mathbb{N}}\,,\ \lambda_1 \in \mathbb{C}\}$$

Posons à présent, $\lambda_1 := \frac{1}{2}(A - iB)$ avec $A,\ B \in \mathbb{R}$, $\rho := |r_1|$, et $\theta := \arg(r_1)$. On a alors :

$$2\mathrm{re}(\lambda_1 r_1^n) = \mathrm{re}(A - iB)\rho^n\,(\cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)) = \rho^n\,(A.\cos(n\theta) + B.\sin(n\theta))$$

Finalement $E_{a,b} = \{(\rho^n(A.\cos(n\theta) + B.\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$, où $\rho = |r_1|$ et $\theta = \arg(r_1)$.

□

Exemple. Considérons la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} \phi_0 = 0,\ \phi_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n \end{cases}$$

L'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ possède deux solutions réelles : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. D'après le théorème 12, il existe donc $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \phi_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Or, $\left(\begin{cases}\phi_0 = 0 \\ \phi_1 = 1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}\right)$.

D'où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Chapitre 2

Séries à termes réels positifs. Applications

Pré-requis

1. Suite extraite, sous-suite d'une suite réelle.
2. Comportement asymptotique d'une suite réelle.
3. Théorème de convergence monotone pour les suites réelles.
4. Suites de Cauchy (dans un espace métrique, « de Cauchy » $\Leftrightarrow$ « convergente »).
5. Notion de série à termes réels.
6. Série géométrique.

2.1 Étude de la convergence

2.1.1 Critères de convergence

Théorème 13. *(Théorème de convergence monotone) Une série à termes réels positifs converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée.*

Démonstration. $\Rightarrow$: supposons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers $l \in \mathbb{R}$. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geqslant n_0$, $|S_n - l| < \varepsilon$. D'où $|S_n| < \varepsilon + l$. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\max\{S_0, S_1, \ldots, S_{n_0-1}, \varepsilon + l\}$.

$\Leftarrow$: considérons la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série.

Soit $E = \{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$ l'ensemble des termes de la suite. E est non-vide et majoré donc possède une borne supérieure A qui est le plus petit des majorants des termes de la suite. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $A - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E car $A - \varepsilon < A$.

Donc il existe un rang n_0 tel que $S_{n_0} > A - \varepsilon$. Or, S est croissante sur $\mathbb{N}$, donc pour tout $n \geqslant n_0$, $S_n > A - \varepsilon$. Ce qui signifie bien que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A. $\square$

Exemple. Nature de $\sum \frac{1}{n^2}$: Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. On en déduit que pour tout entier naturel $k \geqslant 3$, la série $\sum \frac{1}{n^k}$ converge.

Théorème 14. *(Critère de Cauchy pour les séries) Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. $\sum u_n$ converge si, et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\, \forall\, p, q \in \mathbb{N},\, (p,\, q \geqslant n_0) \Rightarrow (|S_p - S_q| < \varepsilon)$$

Démonstration. Il suffit de démontrer ce critère pour les suites réelles en général puis de l'appliquer à la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\Rightarrow$: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant n_0, |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $p,\, q \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \geqslant n_0$. Alors $|u_p - u_q| < |u_p - l| + |l - u_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

$\Leftarrow$: soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1re étape : *toute suite de Cauchy est bornée.*

En appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(p, q \geqslant n_0) \Rightarrow (|u_p - u_q| < 1)$. Donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| < |u_{n_0}| + 1$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\max\{1 + |u_{n_0}|, |u_0|, |u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{n_0-1}|\}$.

2e étape : *théorème de Bolzano-Weierstrass* : *Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Soient m un minorant et M un majorant de la suite u.

- Nous allons construire une suite de segments emboîtés $(I_n = [a_n; b_n])_{\,n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, u_k \in I_n\}$ est infini. Pour cela, on pose $I_0 := [m; M]$ et, supposant construit $I_n = [a_n; b_n]$ tel que $\{k \in \mathbb{N}, u_k \in I_n\}$ est infini, au moins l'un des deux intervalles $\left[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ et $\left[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n\right]$ possède la même propriété, intervalle que l'on choisit alors pour I_{n+1}. On a ainsi, une suite décroissante de segments emboîtés dont la longueur $\frac{M-m}{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Leur intersection contient donc un unique point l qui est la limite commune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Extrayons maintenant une sous-suite de u convergeant vers l. Construisons par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$. On pose $\varphi(0) = 0$, on a alors : $a_0 \leqslant u_{\varphi(0)} \leqslant b_0$. Supposons avoir défini $\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)$ vérifiant : $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n-1)$ et : $\forall\, p \in [\![0; n-1]\!]$, $a_p \leqslant u_{\varphi(p)} \leqslant b_p$. $\{k \in \mathbb{N},\ u_k \in [a_n; b_n]\}$ est infini, il n'est pas majoré et il contient donc des éléments strictement supérieurs à $\varphi(n-1)$. Si l'on choisit l'un de ces éléments comme valeur de $\varphi(n)$, on a bien : $\varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n-1) < \varphi(n)$ et $\forall\, p \in [\![0; n]\!]$, $a_p \leqslant u_{\varphi(p)} \leqslant b_p$. On a ainsi défini une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$. On en déduit par le théorème d'encadrement que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

3$^{\text{e}}$ étape : *toute suite de Cauchy possédant une sous-suite convergente converge.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy admettant une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $l \in \mathbb{R}$. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall\, p, q \geqslant n_1$, $|u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geqslant n_2$, $|u_{\varphi(n)} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_3 := \max\{n_1, n_2\}$. $\forall n \geqslant n_3$, on a :
$|u_n - l| = |u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} - l| = |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - l| \leqslant \varepsilon$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. □

Exemple. Nature de $\sum \frac{1}{n!}$. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p < q$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|S_q - S_p| &= \sum_{k=p+1}^{k=q} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(p+1)!}\left(1 + \frac{1}{p+2} + \ldots + \frac{1}{(p+2)\ldots(q-1)q}\right) \\
&\leqslant \frac{1}{(p+1)!}\left(1 + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(p+2)^{q-p-1}}\right)
\end{aligned}$$

Or, la suite des $S'_k = \sum\limits_{i=0}^{i=k} \frac{1}{(p+2)^i}$ est croissante et convergente vers $\frac{p+2}{p+1}$.

D'où : $\sum\limits_{k=p+1}^{k=q} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{(p+1)!} \times \frac{p+2}{p+1}$. Comme $\frac{1}{(p+1)!} \times \frac{p+2}{p+1}$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{k!}$ est de Cauchy et donc convergente d'après le critère de Cauchy.

2.1.2 Condition nécessaire de convergence

Théorème 15. *Si une série converge, alors son terme général tend vers 0.*

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors la suite des $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge. Or, dans un espace métrique, tout suite convergente est de Cauchy. Ainsi, on a : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$, $(n_0 \leqslant p < q) \Rightarrow (|S_p - S_q| < \varepsilon)$.

En particulier, on a : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $(p \geqslant n_0) \Rightarrow (|S_{p+1} - S_p| < \varepsilon)$.

Soit : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geqslant n_0) \Rightarrow (u_{p+1} < \varepsilon)$.
Ce qui traduit bien la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0. □

Remarque. La réciproque est fausse : la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{2p} - S_p = \sum_{k=p+1}^{k=2p} \frac{1}{k} = \frac{1}{p+1} + \ldots + \frac{1}{2p} \geqslant p \times \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy et ne peut donc converger.

2.2 Quelques outils

2.2.1 Test intégral

Théorème 16. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante ; posons, pour tout $n \geqslant a$, $a_n := f(n)$. Alors, la série $\sum a_n$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite quand n tend vers $+\infty$. On dit que la série $\sum a_n$ et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.*

Démonstration. Soit $n_0 \geqslant a$. f étant décroissante sur $[a; +\infty[$, on a pour tout entier $k \geqslant n_0$:

$$a_{k+1} = f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) = a_k$$

D'où, pour tout $n > n_0$:

$$\sum_{k=n_0+1}^{k=n} a_k \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leqslant \sum_{k=n_0}^{k=n-1} a_k$$

$\Rightarrow$: supposons que la série $\sum a_n$ converge vers un réel S. Alors $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. De plus, $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante par positivité de la fonction f, donc, d'après le théorème de convergence monotone, $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$\Leftarrow$: supposons que la suite $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l. Alors la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{k=n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $l + \sum_{k=0}^{k=n_0} a_k$. De plus, cette suite est croissante par positivité des a_k, donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone. Attention, le fait que $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge n'est pas équivalent à la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)dt$, mais est seulement impliqué par celle-ci. Cependant, ici f est positive. Par conséquent, si $\left(\int_a^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l, et si $x \in [a; +\infty[$, alors on a :

$$\int_a^{E(x)} f(t)dt \leqslant \int_a^{x} f(t)dt \leqslant \int_a^{E(x)+1} f(t)dt$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et vaut l en vertu du théorème des gendarmes. □

Corollaire 17. *(Séries de Riemann) La série de terme général $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

Démonstration. Si $\alpha \leqslant 0$, le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série diverge. Supposons donc $\alpha > 0$. Soit $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. f est continue, positive et décroissante sur $[1; +\infty[$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge donc si, seulement si, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge. Si $\alpha = 1$, une primitive de la fonction intégrée est $t \to \ln(t)$ qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Si $\alpha \neq 1$, une primitive de la fonction intégrée est $t \longmapsto \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$ qui converge (vers 0) quand t tend vers $+\infty$ uniquement lorsque $\alpha > 1$. □

Corollaire 18. *(Cas particulier des séries de Bertrand) La série de terme général $a_n = \frac{1}{n.(\ln(n))^\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, converge si, et seulement si, $\beta > 1$.*

Démonstration. Si $\beta \leqslant 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, $a_n \geqslant \frac{1}{n}$. Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$, donc, par comparaison, $\sum a_n$ diverge aussi. Si $\beta > 0$, soit $f : [2; +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = \frac{1}{t.(\ln(t))^\beta}$. f est continue, positive et décroissante sur $[2; +\infty[$. En posant $a_n := f(n)$, la série $\sum a_n$ converge donc si, et seulement si, l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ converge. Effectuons le changement de variable $u = \ln(t)$. On obtient alors l'intégrale $\int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$. Cette dernière converge si, et seulement si, $\beta > 1$. □

2.2.2 Comparaisons directe et logarithmique

Théorème 19. *(Comparaison directe) Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs telles que, pour tout entier naturel n, on ait $a_n \leqslant b_n$.*

1. *Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.*

Démonstration. Posons, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} S_n(a) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} a_k \\ S_n(b) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} b_k \end{cases}$.

Supposons que $\sum b_n$ converge vers $S_b \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout entier naturel n, on a : $S_n(a) \leqslant S_n(b) \leqslant S(b)$. Ainsi la suite des sommes partielles $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente d'après le théorème de convergence monotone.

Supposons que $\sum a_n$ diverge. Alors la suite des sommes partielles $(S_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(a) \leqslant S_n(b)$, nécessairement la suite des sommes partielles $(S_n(b))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. □

Exemple. $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge car, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{\ln(n)}{n^2} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Corollaire 20. *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels positifs.*

1. *Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.*
3. *Si $a_n = o(b_n)$ et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.*
4. *Si $a_n = o(b_n)$ et si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge.*
5. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$ et $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.*

Démonstration. 1. et 2. Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors il existe $\beta > 0$ tel que, à partir d'un certain rang n_0, on ait $a_n \leqslant \beta b_n$. Les séries de termes généraux a_n et βb_n étant de même nature d'après le théorème 19, les résultats en découlent.

3. et 4. Si $a_n = o(b_n)$, alors $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et on est ramené à 1. et 2.

5. Si $a_n \sim b_n$, alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, telle que $a_n = b_n(1+\varepsilon_n)$. Ainsi, à partir d'un certain rang n_0, on doit avoir $-\frac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{2}b_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}b_n$. Ainsi, $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et $b_n = \mathcal{O}(a_n)$ et les deux séries sont de même nature en vertu de 1. et 2. □

Corollaire 21. *(Séries de Bertrand) La série de terme général $a_n = \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$, converge si, et seulement si, le mot (α, β) est strictement supérieur au mot $(1; 1)$.*

Démonstration. 1. Si $\alpha > 1$. Il existe alors un réel γ tel que $1 < \gamma < \alpha$. On a alors :

$$\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta} = \frac{1}{n^\gamma}\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

Comme $\gamma > 1$, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ converge d'après le corollaire 17. Donc, d'après le corollaire 20, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ converge aussi puisque négligeable devant un série convergente.

2. Si $\alpha < 1$,. Il existe un réel γ tel que $\alpha < \gamma < 1$. Alors la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ est prépondérante devant la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^\gamma}$ laquelle diverge d'après le corollaire 17. Ainsi, d'après le corollaire 20, la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ diverge.

3. Si $\alpha = 1$, le cas a été traité dans le corollaire 18. □

Théorème 22. *(Comparaison logarithmique) Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries à termes réels strictement positifs telles que pour tout entier naturel* n *:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

1. *Si* $\sum b_n$ *converge, alors* $\sum a_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum a_n$ *diverge, alors* $\sum b_n$ *diverge.*

Démonstration. Multiplions les inégalités $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ membre à membre. On obtient $\frac{a_n}{a_0} \leqslant \frac{b_n}{b_0}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant \lambda b_n$ avec $\lambda = \frac{a_0}{b_0} > 0$. Donc, d'après le corollaire 20, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. □

2.2.3 Règles de Cauchy et de d'Alembert

Théorème 23. *(Règle de Cauchy) Soit* $\sum a_n$ *une série à termes réels positifs telle que la suite* $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ait une limite réelle* l*.*

1. *Si* $l < 1$*, alors la série* $\sum a_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$*, alors la série* $\sum a_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$*, alors le comportement de la série* $\sum a_n$ *n'est pas prévisible. Toutefois, si la suite* $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *tend vers* 1 *par valeurs supérieures, alors la série* $\sum a_n$ *diverge.*

Démonstration. L'idée est d'effectuer une comparaison directe à une série géométrique.

1^{er} cas : si $l < 1$. Il existe un réel $r \in]l; 1[$. Pour tout entier naturel n, posons $b_n = r^n$. La série $\sum b_n$ converge puisque géométrique de raison vérifiant $0 \leqslant r < 1$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < r$. Donc il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{a_n} < r$. Et donc, $a_n < r^n = b_n$. D'après le théorème de comparaison directe, la série $\sum a_n$ converge.

2^{e} cas : si $l > 1$. Idem.

3^{e} cas : si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1^+$. Alors il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$. Ainsi, la série $\sum a_n$ diverge car son terme général ne peut tendre vers 0. Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1^-$. Alors les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont dans ce cas et pourtant la première diverge alors que la seconde converge. □

Exemple. Considérons la série de terme général $a_n = \frac{2^n}{n^3}$. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \frac{2}{n^{\frac{3}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 > 1$$

Donc, d'après la règle de Cauchy, la série $\sum a_n$ diverge.

Théorème 24. *(Règle de d'Alembert) Soit $\sum a_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite réelle l.*

1. *Si $l < 1$, alors la série $\sum a_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$, alors la série $\sum a_n$ diverge.*
3. *Si $l = 1$, alors le comportement de la série $\sum a_n$ n'est pas prévisible. Toutefois, si la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 par valeurs supérieures, alors la série $\sum a_n$ diverge.*

Démonstration. L'idée est d'effectuer une comparaison logarithmique à une suite géométrique.

1$^{\text{er}}$ cas : si $l > 1$. Alors il existe un réel $r \in]1; l[$. Pour tout entier naturel n, posons $b_n = r^n$. La série $\sum b_n$ diverge puisque géométrique de raison vérifiant $1 < r$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > r$. Donc il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > r = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison logarithmique, la série $\sum a_n$ diverge.

2$^{\text{e}}$ cas : si $l < 1$. Idem.

3$^{\text{e}}$ cas : si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1^+$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et ne peut donc converger vers 0. Ainsi, la série $\sum a_n$ diverge. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1^-$. Alors les séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont dans ce cas et pourtant la première diverge alors que la seconde converge. □

Exemple. Considérons la série de terme général $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^n}.\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum a_n$ converge. De plus, on a nécessairement $\frac{n!}{n^n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que $n! = o(n^n)$.

Remarque. On peut effectuer deux remarques :

1. La règle de Cauchy et la règle de d'Alembert ne sont pas équivalentes. En effet, considérons la série de terme général $a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$ et donc, la règle de Cauchy permet de conclure que la série $\sum a_n$ converge, et, d'autre part : $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{4}{3}$ et $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{1}{12}$ ce qui prouve que $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'admet pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

2. La règle de Cauchy est plus performante que la règle de d'Alembert :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}_+\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l\right)$$

2.2.4 Règle de Raabe-Duhamel

Théorème 25. *(Règle de Raabe-Duhamel) Soit* $\sum a_n$ *une série à termes réels strictement positifs. Si* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *admet un développement asymptotique du type* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ *avec* $\beta \in \mathbb{R}$*, alors :*

1. *Si* $\beta > 1$*, alors la série* $\sum a_n$ *converge.*
2. *Si* $\beta < 1$*, alors la série* $\sum a_n$ *diverge.*
3. *Si* $\beta = 1$*, alors le comportement de la série* $\sum a_n$ *n'est pas prévisible.*

Démonstration. Il s'agit de faire une comparaison logarithmique avec une série de Riemann.

1^{er}cas : si $\beta > 1$. Alors il existe $\alpha \in]1; \beta[$. Pour tout entier naturel non nul n, posons $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. On a alors :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme $\alpha < \beta$, alors : $1 - \frac{\beta}{n} < 1 - \frac{\alpha}{n}$. D'où, pour n suffisamment grand, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Or, $\sum b_n$ converge car c'est une série de Riemann avec $\alpha > 1$. Donc, d'après le théorème de comparaison logarithmique, la série $\sum a_n$ converge.

2^{e} cas : si $\beta < 1$. Idem.

3^{e} cas : si $\beta = 1$. Les séries $\sum \frac{1}{n.\ln(n)}$ et $\sum \frac{1}{n.(\ln(n))^2}$ sont toutes deux telles que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors que la première diverge et la seconde converge. □

Remarque. La règle de Raabe-Duhamel est un raffinement de la règle de d'Alembert.

Exemple. Considérons la série de terme général $a_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1^- lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Écrivons alors un développement asymptotique de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{2n+1}{2n} . \frac{2n}{2n+2} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) . \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}$$

D'où :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right) . \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ici, $\beta = \frac{1}{2} < 1$. Donc, d'après la règle de Raabe-Duhamel, la série $\sum a_n$ diverge.

2.3 Formule de Stirling

Théorème 26. *(Formule de Stirling)* $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Démonstration. Démontrons qu'il existe un réel strictement positif l tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}} = l$$

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $u_n := \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ et $v_n := \lim\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}\sqrt{n+1}}.\frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!} = \frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}$$

Donc $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Or, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}(1+\varepsilon_n)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$.

D'où :

$$\begin{aligned}
v_n &= 1-(n+\frac{1}{2})\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}(1+\varepsilon_n)\right)\\
v_n &= 1-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}(1+\varepsilon_n)+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}(1+\varepsilon_n)\right)\\
v_n &= -\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{n^2}\left(\frac{\varepsilon_n}{3}+\frac{1+\varepsilon_n}{6n}\right)\\
v_n &= -\frac{1}{12n^2}\left[1+\left(4\varepsilon_n+\frac{2(1+\varepsilon_n)}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} 4\varepsilon_n + \frac{2(1+\varepsilon_n)}{n} = 0$ et $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge. Donc il existe un réel l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{k=n} v_k = l$. Comme, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=1}^{k=n-1} v_n = \ln(u_n) - \ln(u_1)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n) = \ln(u_1)+l$. Ainsi, il existe un réel strictement positif $L = e^{\ln(u_1)+l}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Par conséquent, $n! \sim L\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Il reste à déterminer la constante L. Pour cela, on fait intervenir, pour tout entier naturel n, l'intégrale de Wallis : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

- *Première étape.* Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n+1}(x)dx \\
&= \left[-\cos(x).\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x).(n+1).\sin^n(x)dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-\sin^2(x)].\sin^n(x)dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)dx \\
&= (n+1).I_n - (n+1).I_{n+2}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.I_n$.

- *Deuxième étape.* On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$. D'où l'on déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}.\frac{1.3.5\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4.5\ldots(2n-2).2n} = \frac{\pi.(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2.4.6\ldots(2n-2).2n}{1.3.5\ldots(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{2n}.I_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1).I_n.I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

- *Troisième étape.* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est naturellement décroissante et strictement positive. D'où :

$$\begin{aligned}
& I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \\
\Rightarrow\ & \tfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \tfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1 \\
\Rightarrow\ & \tfrac{n+1}{n+2} \leqslant \tfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, c'est-à-dire $I_{n+1} \sim I_n$. D'où l'on tire $n.I_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ puis $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

- *Quatrième étape.* On a $I_{2n} = \frac{\pi.(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$. D'où :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \sim \frac{L\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}\pi}{2^{2n+1}(L\sqrt{n}n^ne^{-n})^2}$$

Et, après simplifications :

$$L = \sqrt{2\pi}$$

□

Chapitre 3

Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence

Pré-requis

1. Séries à termes réels positifs.
2. Critère de Cauchy.
3. Suites adjacentes.
4. Règle de d'Alembert.

3.1 Convergence absolue et semi-convergence

Définition 27. Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. Cette série est dite absolument convergente si la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ converge.

Exemples. $\sum \frac{\sin(\ln(n))}{n^2}$ est absolument convergente et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas absolument convergente.

Proposition 28. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes, absolument convergente. Pour tous entiers naturels p et q tels que $p < q$, on a $|u_{p+1}+\ldots+u_q| \leqslant |u_{p+1}|+\ldots+|u_q|$. Donc tout paquet de Cauchy de la série $\sum u_n$ est majoré par le paquet de Cauchy correspondant de la série $\sum |u_n|$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum |u_n|$ converge, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\, p,\, q \geqslant n_0,\ (p < q) \Rightarrow (|u_{p+1}| + \ldots + |u_q| < \varepsilon)$. Mais alors, $|u_{p+1} + \ldots + u_q| < \varepsilon$. Ainsi, d'après le critère de Cauchy, la série $\sum u_n$ converge. $\square$

Remarque. La réciproque de cette proposition est fausse. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

Définition 29. Une série $\sum u_n$ à termes complexes qui converge mais n'est pas absolument convergente est dite semi-convergente.

Définition 30. Une série $\sum u_n$ à termes réels est dite alternée si $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

Exemples. $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n}$ n'est pas alternée.

Théorème 31. *(Théorème des séries alternées) Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant. Alors $\sum u_n$ converge. En outre, on a la majoration des restes :*

$$|R_n| := \left| \sum_{k=n+1}^{k=+\infty} u_k \right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Autrement dit, la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant la somme de la série par la somme partielle d'ordre n est majorée par la valeur absolue du premier terme négligé.

Démonstration. $\sum u_n$ est alternée donc la suite de terme général $(-1)^n u_n$ est de signe constant. On peut donc, sans perdre de généralité, supposer ce signe positif. Ainsi, on a $u_n = (-1)^n |u_n|$. Posons $S_n := \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k |u_k|$ la somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$. Nous allons démontrer que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, ce qui nous donnera leur convergence vers la même limite, donc la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$S_{2p+2} - S_{2p} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+1}| \leqslant 0$ puisque la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée décroissante. De même, $S_{2p+1} - S_{2p-1} = -|u_{2p+1}| + |u_{2p}| \geqslant 0$. Ainsi, $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante. En outre, $S_{2p} - S_{2p+1} = |u_{2p+1}|$ et comme $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont bien adjacentes. Ainsi, $\sum u_n$ converge. Soit S la limite commune de ces deux suites.
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|S - S_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}|$. Autrement dit :

$$|R_n| := \left| \sum_{k=n+1}^{k=+\infty} u_n \right| \leqslant |u_{n+1}|$$

□

Exemples. 1. Considérons les séries de Riemann alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \leqslant 0$, le terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 donc la série diverge. Si $\alpha > 0$, les conditions du théorème des séries alternées sont satisfaites, et donc la série converge.

2. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ est convergente d'après le théorème des séries alternées.

3. La série $\sum \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ est absolument convergente d'après la règle de d'Alembert. En effet, $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$. D'après la proposition 28, $\sum \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ converge.

Remarque. L'hypothèse de décroissance de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas nécessaire à la convergence de $\sum u_n$. Considérons la série alternée de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$. Étudions le sens de variation de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$|u_{n+1}| - |u_n| = \frac{1}{n+1+(-1)^n} - \frac{1}{n+(-1)^{n-1}} = \frac{2(-1)^{n-1}-1}{(n+1+(-1)^n)\,(n+(-1)^{n-1})}$$

qui n'est donc pas de signe constant.

Cela montre que le théorème des séries alternées ne s'applique pas, puisque l'hypothèse de décroissance de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas satisfaite. Cela ne signifie pas pour autant que la série $\sum u_n$ diverge. D'ailleurs :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}}\right)$$

C'est-à-dire :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi, u_n est la somme de trois termes. Le premier est le terme général d'une série de Riemann alternée convergente, le deuxième est le terme général d'une série de Riemann convergente et le troisième, négligeable devant $\frac{1}{n^2}$, est le terme d'une série absolument convergente, donc convergente. Par conséquent, $\sum u_n$ est convergente.

3.2 Théorème d'Abel

Théorème 32. *(Théorème d'Abel) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *Il existe $M \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_0 + \ldots + b_n| \leqslant M$.*
2. *La série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente.*
3. *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p < q$. Réécrivons le paquet de Cauchy $\sum_{n=p+1}^{n=q} a_n b_n$ à l'aide de ce que l'on appelle, la « transformation d'Abel ». Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n := \sum_{k=0}^{k=n} b_k = b_0 + \ldots + b_n$. On a alors :

$$b_{p+1} = B_{p+1} - B_p,\; b_{p+2} = B_{p+2} - B_{p+1},\; b_q = B_q - B_{q-1}$$

D'où :

$$\sum_{n=p+1}^{n=q} a_n b_n = \sum_{n=p+1}^{n=q} a_n (B_n - B_{n-1})$$

Ce qui permet d'écrire, réordonnant cette expression selon les B_n :

$$\sum_{n=p+1}^{n=q} a_n b_n = a_q B_q - a_{p+1} B_p - \sum_{n=p+1}^{n=q-1} B_n (a_{n+1} - a_n)$$

D'après la condition 1. et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \sum_{n=p+1}^{n=q} a_n b_n \right| \leqslant M \left(|a_q| + |a_{p+1}| + \sum_{n=p+1}^{n=q-1} |a_{n+1} - a_n| \right)$$

D'après les conditions 2. et 3., la série $\sum a_n b_n$ vérifie le critère de Cauchy donc converge. □

Corollaire 33. *(Version faible du théorème d'Abel) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe satisfaisant les conditions suivantes :*

1. *Il existe $M \in \mathbb{R}_+$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_0 + \ldots + b_n| \leqslant M$.*
2. *La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant.*

Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_{n+1} - a_n| = a_n - a_{n+1}$. Donc l'absolue convergence de la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ équivaut à sa convergence, qui elle-même équivaut au fait que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ait une limite (télescopage des termes). Donc, d'après le théorème 32, $\sum a_n b_n$ converge sous les hypothèses 1. et 2. □

Exemple. Considérons la série de terme général $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, où $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$.

Si $\alpha \leqslant 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Si $\alpha > 1$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc par comparaison, $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Si $\alpha \in]0; 1]$:

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}$. Or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann divergente. Donc $\sum u_n$ est divergente.

Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on écrit $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} = a_n b_n$ avec $a_n := \frac{1}{n^\alpha}$ et $b_n := e^{in\theta}$. La condition 2. de la version faible du théorème faible d'Abel est clairement remplie.

De plus, pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned}
|B_n| &:= \left|1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}+\ldots+e^{in\theta}\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \\
&= \left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}\right| \\
&\leqslant \frac{2}{\left|e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}
\end{aligned}$$

Ainsi, la condition 1. de la version faible du théorème d'Abel est remplie. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge. En résumé, si $\alpha \leqslant 0$, la série diverge, si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente, et si $\alpha \in]0;1]$, la série est semi-convergente pour tout $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et divergente pour tout $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

3.3 Opérations sur les séries

3.3.1 Commutativité

Remarque. Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. Soit σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{\sigma(n)}$ ne sont pas nécessairement de la même nature. Considérons la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dont on sait qu'elle converge vers $\ln(2)$ car $\sum\limits_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} = \ln(1+t)$. On peut modifier l'ordre des termes apparaissant dans cette série en écrivant :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots \\
&= \underbrace{1} -\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}}-\frac{1}{6}+\ldots
\end{aligned}$$

La règle étant, après avoir commencé à 1, d'intercaler entre deux termes d'indice pair (donc négatifs) successifs, 2, puis 4, puis 8, etc. termes consécutifs d'indice impair. La nouvelle série obtenue diverge, car les groupes de 2^k termes d'indices impairs consécutifs constituent des paquets de Cauchy qui ne tendent pas vers 0. En effet, le k-ième paquet, de longueur 2^k, est :

$$\frac{1}{2^{k+1}-1}+\frac{1}{2^{k+1}+1}+\frac{1}{2^{k+1}+3}+\ldots+\frac{1}{2(2^{k+1}-1)-1} \geqslant 2^k\frac{1}{2(2^{k+1}-1)-1} \geqslant \frac{1}{4}$$

Ainsi, la nature de la série a été modifiée par cette permutation des termes.

Proposition 34. *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs convergente. Alors, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est convergente et ces deux séries ont la même somme.*

Démonstration. Supposons que la série $\sum u_n$ converge vers $S \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $N_n := \max\{\sigma(k),\, k \in [\![0;n]\!]\}$. On a alors $\sum\limits_{k=0}^{k=n} u_{\sigma(k)} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{k=N_n} u_k \leqslant S$. Donc la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge puis la suite des sommes partielles est majorée. En outre, si l'on pose S_σ la somme de la série $\sum u_{\sigma(n)}$, on a évidemment $S_\sigma \leqslant S$. En appliquant cette inégalité, valable pour toute bijection σ, à la bijection σ^{-1}, on a alors $S_{\sigma^{-1}\circ\sigma} \leqslant S_\sigma$ soit $S \leqslant S_\sigma$. Ainsi, $S = S_\sigma$. □

Corollaire 35. *Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes absolument convergente. Alors, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et l'on a :*

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n=+\infty} u_{\sigma(n)}$$

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes absolument convergente. D'après la proposition 34, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est clairement absolument convergente. Il reste donc à démontrer l'égalité des sommes. Écrivons $u_n := a_n + ib_n$, puis $a_n = a_n^+ - a_n^-$ et $b_n = b_n^+ - b_n$ avec : $a_n^+ := \sup\{a_n, 0\}$, $a_n^- := -\inf\{a_n, 0\}$, $b_n^+ := \sup\{b_n, 0\}$ et $b_n^- := -\inf\{b_n, 0\}$. Comme les séries de termes respectifs a_n^+, a_n^-, b_n^+ et b_n^- sont des séries à termes réels positifs, la proposition 34 s'applique à chacune d'elle et nous donne le résultat, u_n étant une combinaison linéaire de ces quatre termes. □

3.3.2 Associativité

Remarque. Considérons la série de terme général $u_n = (-1)^n$. On sait que cette série diverge puisque le terme général ne converge pas vers 0. Si l'on regroupe deux par deux les termes consécutifs à partir de u_0. On obtient $v_0 := u_0 + u_1 = 0$, $v_1 := u_2 + u_3 = 0$, $\ldots, v_n := u_{2n} + u_{2n+1} = 0$, etc. Autrement dit, on obtient la série nulle qui est évidemment convergente. Ainsi, un regroupement quelconque de termes peut modifier la nature d'une série.

Théorème 36. *(Théorème de sommation par paquets) Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $v_p := \sum\limits_{n=\varphi(p)}^{n=\varphi(p+1)-1} u_n$ et faisons l'hypothèse (H) : $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{n=\varphi(p)}^{n=\varphi(p+1)-1} |u_n| = 0$. Alors, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_p$ converge et dans ce cas, ces deux séries ont la même somme.*

Démonstration. $\Rightarrow$: supposons que $\sum u_n$ converge. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$. Soit $S \in \mathbb{C}$ sa limite. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{k=p} v_k = \sum_{k=0}^{k=p} \left(\sum_{n=\varphi(k)}^{n=\varphi(k+1)-1} u_n \right) = \sum_{n=0}^{n=\varphi(p+1)-1} u_n = S_{\varphi(p+1)-1}$$

qui tend vers S lorsque p tend vers $+\infty$. Ainsi $\sum v_p$ converge et a la même somme que $\sum u_n$.

$\Leftarrow$: supposons que $\sum v_p$ converge et que l'hypothèse (H) soit vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(m) \leqslant n < \varphi(m+1)$. En notant $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on a :

$$S_n = S_{\varphi(m)-1} + \sum_{k=\varphi(m)}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=m-1} v_k + \sum_{k=\varphi(m)}^{k=n} u_k$$

où, par convention, $S_{\varphi(m)-1} = 0$ si $m = 0$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a aussi m qui tend vers $+\infty$. Puisque $\sum v_p$ converge, on peut poser $S' := \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{k=m-1} v_k$ sa somme. Ainsi, pour montrer que $\sum u_n$ converge et a pour somme S', il s'agit de prouver que $\sum\limits_{k=\varphi(m)}^{k=n} u_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Or :
$\left|\sum\limits_{k=\varphi(m)}^{k=n} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=\varphi(m)}^{k=n} |u_k| \leqslant \sum\limits_{k=\varphi(m)}^{k=\varphi(m+1)-1} |u_k|$, qui donne ce que l'on veut d'après l'hypothèse (H). $\square$

Corollaire 37. *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, posons $v_p := \sum\limits_{n=\varphi(p)}^{n=\varphi(p+1)-1} u_n$. Alors, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum v_p$ converge et dans ce cas, ces deux séries ont la même somme.*

Démonstration. $\Rightarrow$: vu au théorème 36.

$\Leftarrow$: la série $\sum u_n$ étant à termes réels positifs, on a :

$$\sum_{n=\varphi(p)}^{n=\varphi(p+1)-1} |u_n| = \sum_{n=\varphi(p)}^{n=\varphi(p+1)-1} u_n = v_p$$

Comme la série $\sum v_p$ converge, son terme général converge vers 0. La condition (H) du théorème 36 est ainsi remplie. Par conséquent, $\sum u_n$ converge. $\square$

3.3.3 Distributivité

Définition 38. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes complexes. La série de terme général w_n défini par :

$$w_n := \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^{p=n} a_p b_{n-p}$$

est appelée le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Remarque. Considérons les séries de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. D'après le théorème des séries alternées, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = (-1)^n \sum_{p+q=n} \frac{1}{\sqrt{pq}}$$

Or, $\sqrt{pq} \leqslant \frac{1}{2}(p+q)$. D'où $|w_n| \geqslant \sum_{p+q=n} \frac{2}{p+q} = 2$. Et donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. Par conséquent le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne peut converger.

Théorème 39. *(Théorème de Cauchy-Mertens) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, dont l'une au moins est absolument convergente. Alors leur série produit de Cauchy $\sum w_n$ converge et :*

$$\sum_{n=0}^{n=+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_p v_q \right) = \left(\sum_{p=0}^{p=+\infty} u_p \right) \left(\sum_{q=0}^{q=+\infty} v_q \right)$$

Démonstration. Supposons que $\sum u_n$ soit absolument convergente et $\sum v_n$ convergente. Soit $(R_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes de la série $\sum v_n$. La série $\sum v_n$ étant convergente, la suite des restes $(R_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi, la suite $\left(\alpha_n := \sup_{p\geqslant n} |R_n(v)|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente vers 0. Notons respectivement U et V les sommes des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On vérifie aisément l'identité suivante :

$$(u_0 + u_1 + \ldots + u_n)V - (w_0 + w_1 + \ldots + w_n) = u_0 R_n(v) + u_1 R_{n-1}(v) + \ldots + u_n R_0(v)$$

Il en résulte, en notant $(S_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ les suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in [\![0;n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} |S_n(u)V - S_n(w)| &\leqslant (|u_0| + \ldots + |u_m|)\,\alpha_{n-m} + (|u_{m+1}| + \ldots + |u_n|)\,\alpha_0 \\ &\leqslant \left(\sum_{n=0}^{n=+\infty} |u_n| \right) \alpha_{n-m} + (|u_{m+1}| + \ldots + |u_n|)\,\alpha_0 \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum u_n$ est absolument convergente, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant m$, on ait : $|u_{m+1}| + \ldots + |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\alpha_0}$. Puisque $\left(\alpha_n := \sup\limits_{p \geqslant n} |R_n(v)|\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant, il existe un entier $n_0 \geqslant m$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :

$$0 \leqslant \alpha_{n-m} \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \sum\limits_{n=0}^{n=+\infty} |u_n|}$$

Il en résulte alors que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|S_n(u)V - S_n(v)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ainsi, la suite $(S_n(u)V - S_n(w))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme $(S_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers U, cela nous donne que $(S_n(w))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers UV. C'est-à-dire que la série $\sum w_n$ converge et que sa somme est égale à UV. $\square$

Chapitre 4

Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence

Pré-requis

1. Suite réelle convergente, divergente.
2. Comparaison de deux suites réelles.
3. Suites adjacentes.
4. Suites récurrentes.
5. Fonction contractante.
6. Les constantes π et e.
7. Développements limités et développements asymptotiques de fonctions usuelles.
8. La leçon se limite à la convergence de suites numériques réelles. En effet, en ce qui concerne les séries, il est possible de se ramener à l'étude de la suite de leurs sommes partielles. Quant aux suites numériques complexes, l'on peut s'y ramener en considérant séparément les parties réelles et imaginaires.

4.1 Vitesse d'une suite convergence

Remarque. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers l. Étudier la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ consiste à comparer la suite $(|v_n| = |u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est positive et tend vers 0, à une suite de référence bien connue.

4.1.1 Quelques étalons de référence

Proposition 40. *Les suites réelles suivantes convergent toutes vers* 0*. De la plus lente à la plus rapide, nous avons :*

1. $\left(\frac{1}{(\ln(n))^\beta}\right)_{n\geqslant 2}$, $\beta > 0$.
2. $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\alpha > 0$.
3. $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0 < k < 1$.
4. $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. $\left(\frac{1}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. $\left(k^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Laissée en exercice au lecteur. □

4.1.2 Les convergences lente, géométrique et rapide

Définition 41. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers un réel l. La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite lente si $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Dans ce cas, il existe λ, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|u_n - l| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

Exemples. 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge vers e. On a l'équivalence : $e - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e}{2n}$.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers la constante d'Euler-Mascheroni γ. On a l'équivalence : $u_n - \gamma \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Définition 42. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers un réel l. La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique si $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers k, avec $0 < k < 1$. Dans ce cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|u_n - l| \underset{+\infty}{\sim} \lambda k^n$.

Exemple. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose u_n (respectivement v_n) le demi-périmètre du polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans le (respectivement circonscrit au) cercle unité. On démontre aisément que les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes et convergent toutes les deux vers π. De plus, $v_n - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^3}{2\times 4^n}$.

Définition 43. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers un réel l. La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite rapide si $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En particulier, elle est dite d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ si $\left(\left|\frac{u_{n+1}-l}{(u_n-l)^r}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel c strictement positif. Dans ce cas, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $r \in]1;+\infty[$ et $k \in]0;1[$ tels que $|u_n - l| \underset{+\infty}{\sim} \lambda k^{(r^n)}$.

Exemples. 1. La suite de Héron $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{d}{u_n}\right) \end{cases}$, où $d \in \mathbb{R}_+$, converge vers $\sqrt{d}$. Cette convergence est rapide d'ordre 2 car $\left(\left|\frac{u_{n+1}-\sqrt{d}}{(u_n-\sqrt{d})^2}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2\sqrt{d}} > 0$.

2. Les suites $\left(u_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(v_n = u_n + \frac{1}{nn!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et convergent toutes les deux vers e. De plus, $e - u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{nn!}$ et $v_n - e \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 n!}$.

4.2 Méthodes d'accélération de la convergence

4.2.1 Barycentration

Exemple. Reprenons les suites $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ représentant les demi-périmètres du polygone régulier à 2^n côtés respectivement inscrit et circonscrit au cercle trigonométrique. Posons, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $w_n := \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n$. Alors $(w_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers π plus rapidement que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$. De plus, $w_n - \pi \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^5}{20\times 16^n}$.

4.2.2 Développement asymptotique

Exemple. Reprenons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \gamma = \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n := u_n - \frac{1}{2n}$, on obtient une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers γ plus rapidement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4.2.3 Méthode de Romberg-Richardson

Théorème 44. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers un réel l pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, k, $k' \in \mathbb{R}$ tels que $|k'| < |k| < 1$ et $u_n = l + \lambda k^n + \mathcal{O}(k'^n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n := \frac{u_{n+1}-ku_n}{1-k}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - l = \mathcal{O}(k'^n)$ et, par conséquent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge géométriquement vers l.*

Démonstration. Expliquons tout d'abord la construction de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'agit d'éliminer le terme en k^n dans l'expression de u_n. L'idée, faute de connaître λ, est de regarder u_{n+1}, puis, en calculant $u_{n+1} - ku_n$, d'éliminer les k^n entre les deux termes. On note alors que $(u_{n+1} - ku_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(1-k)l$ et, en divisant par $1-k$, on trouve une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers l. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n := l+\lambda k^n+w_n$ de sorte que $w_n = \mathcal{O}(k'^n)$. Un rapide calcul donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n - a = \frac{w_{n+1} - kw_n}{1-k}$$

Si l'on a $|w_n| \leqslant c\,|k'^n|$, avec $c \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$|v_n - l| \leqslant \frac{|w_{n+1}| + |k|\,|w_n|}{1-k} \leqslant \frac{c\,(|k| + |k'|)}{1-k}\,|k'^n|$$

D'où la convergence géométrique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l.

□

Remarque. On peut formuler plusieurs remarques :

1. Pour que la méthode précédente ait un sens et un intérêt, il faut :
   (a) Connaître le rapport k, indispensable pour calculer v_n.
   (b) Ne pas connaître le coefficient λ (sinon, il suffit de retrancher λk^n pour avoir aussitôt une suite qui converge comme un $\mathcal{O}(k'^n)$).
2. L'exemple de l'approximation de π par les longueurs des polygones réguliers inscrits fournit un cas où cette méthode s'applique.
3. Lorsque la rapidité de convergence obtenue n'est pas jugée satisfaisante, il est possible d'itérer la méthode de Romberg-Richardson. Plus précisément, si l'on dispose d'un développement asymptotique du type précédent à p termes, la méthode peut être itérée p fois.

4.2.4 Méthode d'accélération d'Aïtken

Remarque. Il s'agit d'une variante de la méthode précédente adaptée au cas où nous ne connaissons pas la valeur de k dans le développement asymptotique $u_n = l + \lambda k^n + \mathcal{O}(k'^n)$. L'idée consiste à déterminer k en remarquant que les termes u_n, u_{n+1} et u_{n-1} sont respectivement de l'ordre de k^n, k^{n+1} et k^{n-1} et donc, par conséquent, que k est proche de $c_n := \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}$. Nous sommes alors amenés à étudier la suite de terme général $v_n := \frac{u_{n+1}-c_n u_n}{1-c_n}$.

Théorème 45. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers un réel l pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $k, k' \in \mathbb{R}$ tels que $|k'| < |k| < 1$ et $u_n = l + \lambda k^n + \mathcal{O}(k'^n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n := \frac{u_{n+1}-c_n u_n}{1-c_n}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - l = \mathcal{O}(k'^n)$ et, par conséquent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge géométriquement vers l.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v'_n = \frac{u_{n+1}-c_n u_n}{1-c_n} = \frac{u_n^2-u_{n+1}u_{n-1}}{2u_n-u_{n+1}-u_{n-1}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $N_n := u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1}$ et $D_n := 2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$v'_n - l = \frac{N_n - lD_n}{D_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n := l + \lambda k^n + w_n$ de sorte que $w_n = \mathcal{O}(k'^n)$. D'une part, le dénominateur D_n de $v'_n - l$ est équivalent à $-\lambda(k-1)^2 k^{n-1}$. D'autre part :

$$N_n - lD_n = \lambda k^{n-1}(2kw_n - k^2 w_{n-1} - w_{n+1}) + w_n^2 - w_{n+1}w_{n-1}$$

d'où :

$$|N_n - lD_n| \leqslant c\,|k|^{n-1}\,|k'|^n$$

où $c > 0$. Par conséquent, $|v'_n - l| \leqslant c'\,|k'|^n$, avec $c' > 0$. Autrement dit, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge géométriquement vers l.

$\square$

Remarque. La méthode d'Aïtken s'applique notamment aux suite récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, si l'on suppose la fonction f de classe $\mathcal{C}^2([a,b];[a,b])$ et contractante, alors elle admet un unique point fixe α et, si l'on suppose $f'(\alpha)$ et $f''(\alpha)$ non nuls, alors on peut prouver que la suite u converge vers α et que l'on a le développement asymptotique $u_n = \alpha + \lambda f'(\alpha)^n + \mu f''(\alpha)^{2n} + o\left(f'(\alpha)^{2n}\right)$, avec λ, $\mu \in \mathbb{R}^*$.

4.3 Approximations de constantes célèbres

4.3.1 Approximation de π

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On calcule le demi-périmètre du polygone régulier à 2^n cotés inscrit dans le cercle unité. On obtient, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.
2. On développe $\sin(x)$ au voisinage de 0 :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!} + o(x^{2n+1})$$

3. On en déduit, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \pi - \frac{\pi^3}{6} \times \frac{1}{4^n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{16^n}\right)$.
4. On applique le théorème 44 avec $k = \frac{1}{4}$, $\lambda = -\frac{\pi^3}{6}$ et $k' = \frac{1}{16}$.
5. Après la première accélération de Romberg-Richardson, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}$.
   Après la deuxième accélération de Romberg-Richardson, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$, $v'_n = \frac{16v_{n+1} - v_n}{15}$.
   Après la deuxième accélération de Romberg-Richardson, on obtient, pour tout $n \geqslant 2$, $v''_n = \frac{64v'_{n+1} - v'_n}{63}$.
   Voici les premiers termes de ces différentes suites.

	u	v	v'	v''
$n=2$	$2,828427125$	$3,13914757$	$3,141590392$	$3,1415927$
$n=3$	$3,061467459$	$3,141437716$	$3,141592664$	$3,141592483$
$n=4$	$3,121445152$	$3,14158298$	$3,141592486$	
$n=5$	$3,136548523$	$3,141591892$		
$n=6$	$3,14033105$			

Rappelons que $\pi \simeq 3,141592654$.

4.3.2 Approximation de e

1. On utilise l'approximation de e par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. On utilise les développements limités du logarithme népérien et de l'exponentielle au voisinage de 0. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{11}{24n^2} - \frac{21}{48n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

3. On applique la méthode de Romberg-Richardson à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_{2^n}$.
4. Les coefficients sont $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = \frac{1}{4}$ et $k_3 = \frac{1}{8}$. Les trois suites $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v'''_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définies par :

$$\begin{cases} v'_n = 2v_{n+1} - v_n \\ v''_n = \frac{4v'_n - v'_n}{3} \\ v'''_n = \frac{8v''_n - v''_n}{7} \end{cases}$$

5. On obtient :

	v	v'	v''	v'''
$n=2$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$2,718235685$
$n=3$	$\ldots$	$\ldots$	$2,718044855$	
$n=4$	$\ldots$	$2,716051761$		
$n=5$	$2,676990129$			

Rappelons que $e \simeq 2,718281828$.

4.4 Le cas des suites divergentes

Définition 46. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle divergente vers $+\infty$. Sa vitesse de divergence est la rapidité de convergence vers 0 de la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On distingue de la même façon la divergence lente, géométrique et rapide.

Exemples. 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge lentement vers $+\infty$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + \sqrt{u_n}$. Il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} c2^n$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge géométriquement vers $+\infty$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + u_n^2$. Il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \exp(c2^n)$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge rapidement vers $+\infty$.