

MPSI,
MP2I, PCSI,
PTSI, TSI

Daniel Duverney
Gilles Bouton
Pascale Bouton
Géry Huvent

Toutes les mathématiques

Première année
de classes préparatoires scientifiques

- Cours et exercices corrigés
- Applications des mathématiques
- Compléments Internet



4^e édition



Module 1

Outils fondamentaux

Chapitre 1

Trigonométrie

Les fonctions trigonométriques sont d'une importance fondamentale. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Savoir utiliser le cercle trigonométrique.
- B. Connaître les propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques : valeurs usuelles, formules résultant des symétries dans le cercle trigonométrique, etc.
- C. Connaître les formules d'addition et de duplication.
- D. Savoir linéariser $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$.
- E. Connaître l'existence des formules de transformation de sommes en produits et de produits en sommes et savoir les retrouver.

1.1 Cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, centré en O (figure 1.1 page suivante). Un point M de ce cercle est repéré par un nombre réel x correspondant à la longueur de l'arc UM , affectée du signe correspondant au sens positif de rotation (sens trigonométrique). *Par définition du radian*, x est la mesure en radians de l'angle de vecteurs orienté $\theta = \widehat{(\vec{OU}, \vec{OM})}$.

Par définition, $\cos x$ est l'abscisse du point M et $\sin x$ est son ordonnée. On définit en outre la *tangente* et la *cotangente* par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cotan x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}. \quad (1.1)$$

On peut démontrer que $\tan x$ est l'abscisse sur l'axe vertical passant par U (axe des tangentes) du point d'intersection de la droite (OM) avec cet axe, tandis que $\cotan x$ est l'abscisse du point d'intersection de la droite (OM) avec l'axe horizontal passant par V (axe des cotangentes).

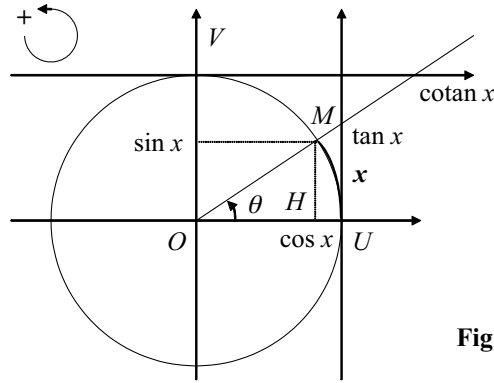


Figure 1.1

Les *lignes trigonométriques* de l'angle θ sont définies par

$$\sin \theta = \sin x, \quad \cos \theta = \cos x, \quad \tan \theta = \tan x, \quad \cotan \theta = \cotan x.$$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OMH montre que

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.2)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les *valeurs usuelles* du sinus, du cosinus et de la tangente, résumées dans le tableau ci-dessous, sont à connaître. Elles se retiennent facilement en remarquant que, pour le sinus par exemple, ces valeurs sont

$$\frac{\sqrt{0}}{2}, \quad \frac{\sqrt{1}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{4}}{2}.$$

Elles s'obtiennent à partir du cercle trigonométrique (exercice 1.1). On notera que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, puisque $2 = (\sqrt{2})^2$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie

Enfin, il résulte immédiatement de (1.2) que, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (1.3)$$

En effet, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$,

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

1.2 Symétries dans le cercle trigonométrique

Certaines propriétés des fonctions trigonométriques résultent des symétries dans le cercle trigonométrique et se *retrouvent très rapidement* dès lors qu'on fait un petit *dessin*. La première série de formules résulte de la figure 1.2 ci-dessous. Le cercle trigonométrique ayant une circonférence de longueur 2π , on a pour tout x réel

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \quad (1.4)$$

Ceci exprime que les fonctions sinus et cosinus sont *périodiques* de période 2π . Il en est de même, bien sûr, pour la fonction tangente, mais 2π n'est pas la plus petite période de la fonction tangente. En effet, les points repérés par x et par $x + \pi$ sont diamétralement opposés. Donc, pour tout x réel,

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x. \quad (1.5)$$

On en déduit que, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(x + \pi) = \tan x$. C'est-à-dire que *la fonction tangente est périodique de période π* .

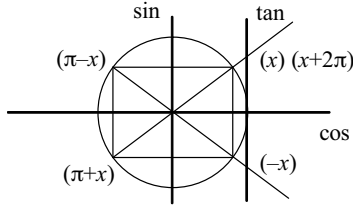


Figure 1.2

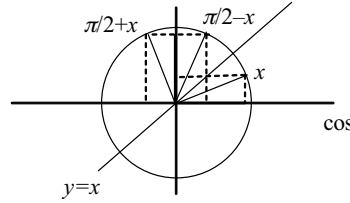


Figure 1.3

Par ailleurs, les points repérés par x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des cosinus. Donc, pour tout x réel

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x. \quad (1.6)$$

Ainsi, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(-x) = -\tan x$ (ce qui se voit aussi sur l'axe des tangentes). On traduit ceci en disant que les fonctions sinus et tangente sont *impaires*, tandis que la fonction cosinus est *paire*.

Enfin, les points repérés par x et $\pi - x$ étant symétriques par rapport à l'axe des sinus, on a pour tout x réel

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x. \quad (1.7)$$

Par conséquent, pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$.

Considérons maintenant la figure 1.3. On observe que les points repérés par x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont *symétriques par rapport à la première bissectrice*. Leurs sinus et cosinus sont donc échangés. Ainsi, pour tout x réel,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x. \quad (1.8)$$

Par ailleurs, le point repéré par $\frac{\pi}{2} + x$ s'obtient à partir du point repéré par x par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Lors de cette rotation, $\cos x$ devient $\sin(x + \frac{\pi}{2})$, tandis que $\sin x$ devient $-\cos(x + \frac{\pi}{2})$ [attention aux signes : $\sin x$ est positif sur la figure, alors que $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ est négatif]. Donc, pour tout x réel,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Ces formules, très importantes, se retiennent facilement si on se souvient des formules qui donnent la dérivée du sinus et du cosinus, et on a le

Théorème 1.1 *Ajouter $\frac{\pi}{2}$ à x dans un sinus ou un cosinus revient à le dériver, c'est-à-dire que pour tout x réel on a*

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (\sin x)' = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (\cos x)' = -\sin x.$$

1.3 Formules d'addition

Les formules d'addition, qui doivent être *connues parfaitement*, s'écrivent, pour tous a, b réels,

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{cases} \quad (1.9)$$

Démonstration : Considérons, sur le cercle trigonométrique de la figure 1.4, un arc de longueur a auquel nous ajoutons un arc de longueur b . Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point N a pour coordonnées $\cos a$ et $\sin a$. Donc $\vec{u} = \overrightarrow{ON} = \cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}$.

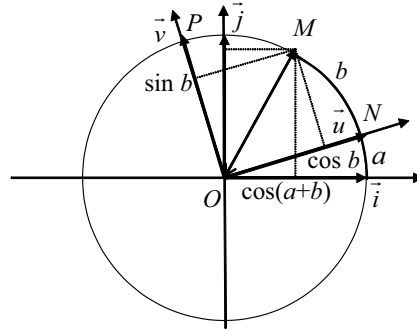


Figure 1.4

De même le point P a pour coordonnées $\cos(a + \frac{\pi}{2})$ et $\sin(a + \frac{\pi}{2})$, donc

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} = -\sin a \vec{i} + \cos a \vec{j}.$$

Dans le cercle trigonométrique du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le point M a pour coordonnées $\cos b$ et $\sin b$, donc $\overrightarrow{OM} = \cos b \vec{u} + \sin b \vec{v}$. En utilisant les expressions de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \cos b(\cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}) + \sin b(-\sin a \vec{i} + \cos a \vec{j}) \\ &= (\cos b \cos a - \sin b \sin a) \vec{i} + (\cos b \sin a + \sin b \cos a) \vec{j}. \end{aligned}$$

Or on a également $\overrightarrow{OM} = \cos(a+b) \overrightarrow{i} + \sin(a+b) \overrightarrow{j}$ dans le cercle trigonométrique du repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. En identifiant les deux expressions de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on obtient les formules d'addition (1.9).

Des formules d'addition (1.9) on déduit la formule d'addition pour la fonction tangente, à connaître mais surtout à *savoir retrouver* (Exercice 1.2).

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad (1.10)$$

1.4 Formules de duplication

En faisant $a = b = x$ dans les formules d'addition, on obtient immédiatement les *formules de duplication* :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

En utilisant la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on peut transformer la formule de $\cos 2x$ en remplaçant, soit $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, soit $\cos^2 x$ par $1 - \sin^2 x$. On obtient deux autres formules pour $\cos 2x$:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \quad (1.11)$$

A partir de (1.11), on obtient immédiatement les *formules de linéarisation* de $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$, que l'on doit savoir retrouver rapidement :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \quad (1.12)$$

1.5 Transformations de produits en sommes

On peut transformer en une somme un *produit de deux sinus*, ou un *produit de deux cosinus*, ou le *produit d'un sinus et d'un cosinus*. Il n'est pas utile de connaître ces formules par coeur, mais il faut savoir qu'elles existent et savoir les retrouver rapidement. On les obtient à partir des formules d'addition. Partons d'abord de

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Remplaçons b par $-b$. Puisque la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus paire, on obtient

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient immédiatement la première formule de transformation de produit en somme :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \quad (1.13)$$

Partons maintenant de $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. En remplaçant de nouveau b par $-b$, il vient $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. En additionnant ces deux égalités, on obtient la deuxième formule de transformation de produit en somme :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]. \quad (1.14)$$

En les soustrayant, on obtient la troisième formule de transformation de produit en somme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]. \quad (1.15)$$

1.6 Transformations de sommes en produits

Inversement, on peut transformer des sommes ou différences de deux sinus ou deux cosinus en produits de fonctions trigonométriques. Ces formules se retrouvent également à partir des formules d'addition, en notant que

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}.$$

Ainsi, par exemple, on a

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= \sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) \\ &= \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} + \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\ &\quad + \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} - \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}, \end{aligned}$$

d'où la première formule de transformation de produit en somme :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}. \quad (1.16)$$

De même on obtient facilement

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \quad (1.17)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \quad (1.18)$$

On notera que $\sin p - \sin q$ peut s'obtenir en remplaçant q par $-q$ dans (1.16).

Exercices

Les basiques

Exercice 1.1 (A,B) Calculer les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$ à partir du cercle trigonométrique. On pourra faire apparaître des triangles remarquables.

Exercice 1.2 (C) Démontrer la formule (1.10).

Exercice 1.3 (A,B,C) Calculer les valeurs des sinus et cosinus des nombres réels a , b et $a + b$ sachant que

a) $\cos a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos b = -\frac{1}{2}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \pi$.

b) $\sin a = \frac{2}{5}$, $\sin b = \frac{3}{5}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < b < \pi$.

Exercice 1.4 (B) Calculer $\sin \theta$, sachant que $\tan \theta = 3 \cos \theta$.

Exercice 1.5 (C) Démontrer que $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

Exercice 1.6 (C) Calculer $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos \theta$.

En déduire que $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$, $x_2 = \cos \frac{7\pi}{9}$, $x_3 = \cos \frac{13\pi}{9}$ sont solutions de l'équation du troisième degré $8x^3 - 6x - 1 = 0$.

Exercice 1.7 (C) Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$.

Exercice 1.8 (B,C) Simplifier les sommes suivantes :

$$S_1 = \cos \omega t + \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

$$S_2 = \sin \omega t + \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} + \sin \left(\omega t - \frac{3\pi}{4} \right) \cos \frac{3\pi}{4}.$$

Exercice 1.9 (C) Démontrer les relations suivantes :

1) $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$.

2) $\sin(x + y) \cos(x - y) = \sin x \cos x + \sin y \cos y$.

3) $\tan x - \tan y = \frac{2 \sin(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}.$

Exercice 1.10 (D) Démontrer que $\sin^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$.

Exercice 1.11 (B,D) 1) Montrer que $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$.

2) En déduire la valeur de

$$S(x) = \cos^4 x + \cos^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos^4 \left(x + \frac{2\pi}{4} \right) + \cos^4 \left(x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

Exercice 1.12 (E) Démontrer que $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$.

Exercice 1.13 (B,C) Soit $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Calculer $\cos 2x$ et en déduire x .

Exercice 1.14 (B,E) Simplifier $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$. En déduire $\tan \frac{\pi}{24}$.

Les techniques

Exercice 1.15 Démontrer que

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}.$$

Exercice 1.16 On pose $t = \tan \frac{x}{2}$. Démontrer que

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Exercice 1.17 x et y sont deux nombres réels compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et vérifient $\tan x = \frac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

- 1) Montrer que $0 \leq x + 2y \leq \frac{3\pi}{2}$.
- 2) Calculer $\tan(x + 2y)$. En déduire la valeur de $x + 2y$.

Exercice 1.18 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \neq 2k\pi$. Démontrer que

$$\frac{1 - \cos(n+1)\theta - \cos\theta + \cos n\theta}{2(1 - \cos\theta)} = \cos \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Exercice 1.19 Démontrer les formules suivantes :

$$1) \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \cotan \frac{x}{2} ; \quad 2) \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \cotan \frac{x}{2}.$$

Exercice 1.20 Calculer $S = \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 1.21 1) Calculer le réel $A = \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}\right) \sin \frac{\pi}{5}$.

2) En déduire que $4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = 0$, puis les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et de $\cos \frac{\pi}{5}$.

Les exotiques et les olympiques

Exercice 1.22 En utilisant le cercle trigonométrique, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Exercice 1.23 Résoudre l'équation $\cos^{2021} x + \cos^{2022} x + \cos^{2023} x = 3$.

Exercice 1.24 Soit $\alpha = \cos \frac{2\pi}{7}$, $\beta = \cos \frac{4\pi}{7}$, $\gamma = \cos \frac{6\pi}{7}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \neq k\pi$. Calculer $\sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta)$.

En déduire que $1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{(2n+1)\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$.

2) Calculer $\alpha + \beta + \gamma$.

3) Calculer $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$.

4) Calculer $\alpha\beta\gamma$.

5) Démontrer que α , β et γ sont solutions d'une équation du troisième degré à coefficients entiers, que l'on déterminera.

Chapitre 2

Compléments de trigonométrie

La résolution des équations trigonométriques est un problème central dans les applications. Ce chapitre en donne quelques exemples. Il conduit notamment à l'introduction des fonctions trigonométriques réciproques, qui sont fondamentales. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Connaître la définition des fonctions trigonométriques réciproques.
- B. Savoir résoudre les équations trigonométriques élémentaires.
- C. Savoir écrire $a \sin x + b \cos x$ sous la forme amplitude-déphasage.
- D. Connaître les coordonnées polaires.
- E. Savoir tracer des représentations graphiques de sinusoïdes, modulées en amplitude ou non.

2.1 Inversion des fonctions trigonométriques

Soit a donné. On cherche à résoudre les équations d'inconnue x :

$$\sin x = a \quad ; \quad \cos x = a \quad ; \quad \tan x = a. \quad (2.1)$$

Observons d'abord la figure 2.1, où a est donné sur l'axe des sinus.

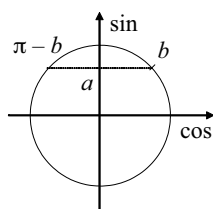


Figure 2.1

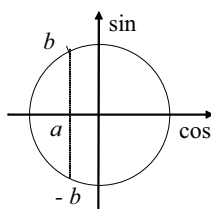


Figure 2.2

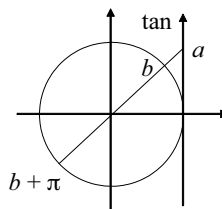


Figure 2.3

On voit que l'équation $\sin x = a$ a deux solutions "primaires" b et $\pi - b$, et que toutes les autres s'en déduisent en rajoutant un nombre entier de tours du cercle trigonométrique. Ainsi on a le

Théorème 2.1 *Pour tout a donné dans $[-1, 1]$, l'équation $\sin x = a$ admet une infinité de solutions : $x = b + 2k\pi$ et $x = \pi - b + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.*

On rappelle que $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ est l'ensemble des *entiers relatifs* (positifs ou négatifs). Ainsi l'expression " $+2k\pi$ " représente-t-elle un nombre entier de tours du cercle trigonométrique, dans le sens positif ou négatif. De même, les figures 2.2 et 2.3 permettent d'énoncer les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.2 *Pour tout a donné dans $[-1, 1]$, l'équation $\cos x = a$ admet une infinité de solutions : $x = b + 2k\pi$ et $x = -b + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.*

Théorème 2.3 *Pour tout a donné dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan x = a$ admet une infinité de solutions : $x = b + k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.*

Exemple 2.1 Puisque $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, les solutions de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ sont données par $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

La définition des fonctions trigonométriques réciproques vise en premier lieu à donner un nom au nombre b qui apparaît dans les figures 2.1, 2.2, 2.3. Examinons la figure 2.1 : il est clair que, lorsque a varie entre -1 et 1 sur l'axe des sinus, ce nombre b varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ceci conduit à définir "arc sinus a ", l'arc de cercle dont le *sinus* vaut a , par la

Définition 2.1 *Pour tout $a \in [-1, 1]$, $\arcsin a$ est le nombre réel compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut a .*

Voir la figure 2.4. De même, on définit "arc cosinus a ", l'arc de cercle dont le *cosinus* vaut a , et "arc tangente a ", l'arc de cercle dont le *tangente* vaut a , par

Définition 2.2 *Pour tout $a \in [-1, 1]$, $\arccos a$ est le nombre réel compris entre 0 et π dont le cosinus vaut a .*

Définition 2.3 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\arctan a$ est le nombre réel compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut a .*

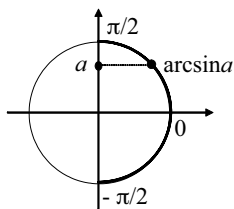


Figure 2.4

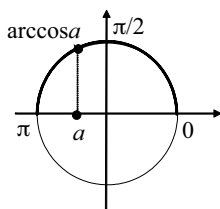


Figure 2.5

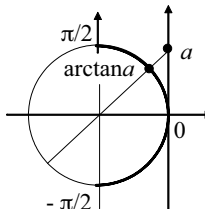


Figure 2.6

Exemple 2.2 Le nombre $\arctan 1$ est parfaitement défini : c'est le nombre compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut 1 . Ainsi $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Cependant, l'équation $\tan x = 1$ a une infinité de solutions : $x = \arctan 1 + k\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

De même, les solutions de l'équation $\tan x = \frac{1}{2}$ sont : $x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La calculatrice donne $\arctan \frac{1}{2} \approx 0,464$. Il n'y a qu'une valeur possible.

2.2 Résolution d'équations trigonométriques

Dans les applications (voir notamment les sections 2.4 et 2.5), on se trouve fréquemment confronté au problème suivant : trouver *une* valeur de x telle que $\sin x = \alpha$ et $\cos x = \beta$, où α et β sont deux nombres réels donnés, vérifiant $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (sinon, le problème n'a pas de solution).

Premier cas α et β sont des valeurs usuelles du sinus et du cosinus. On utilise alors le tableau des valeurs usuelles du sinus et du cosinus et les symétries du cercle trigonométrique.

Exemple 2.3 Trouver une valeur de x telle que $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Puisque $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on trouve $x = -\frac{\pi}{4}$.

Deuxième cas α et β ne sont pas des valeurs usuelles du sinus et du cosinus. On exprime alors x à l'aide de la fonction arctangente, ce qui permet de trouver une valeur numérique de x à l'aide de la calculatrice :

Théorème 2.4 Une solution du système $\sin x = \alpha$ et $\cos x = \beta$ est

$$x = \arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \text{ si } \beta > 0 ; x = \arctan\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + \pi \text{ si } \beta < 0.$$

Démonstration Posons $\gamma = \arctan \frac{\alpha}{\beta}$, et supposons d'abord que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. La figure 2.7 montre alors que $\cos \gamma = \beta$ et $\sin \gamma = \alpha$, de telle sorte que $x = \gamma$ est une solution des deux équations $\sin x = \alpha$ et $\cos x = \beta$. Par contre, si $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, la figure 2.8 montre que l'on a $\sin \gamma = -\alpha$ et $\cos \gamma = -\beta$: il faut en effet se rappeler que, *par définition*, $\arctan \frac{\alpha}{\beta} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Donc une solution des deux équations $\sin x = \alpha$ et $\cos x = \beta$ est $x = \gamma + \pi$. Les cas $\alpha < 0, \beta > 0$ et $\alpha < 0, \beta < 0$ sont analogues et laissés au lecteur.

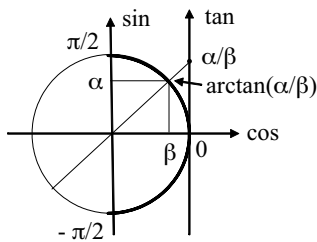


Figure 2.7

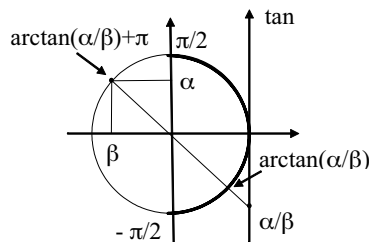


Figure 2.8

Exemple 2.4 Trouver une valeur de x telle que $\sin x = \frac{3}{5}$ et $\cos x = -\frac{4}{5}$. Puisque ici $\cos x$ est négatif et les valeurs données ne sont pas des valeurs usuelles, on obtient $x = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + \pi \approx 2,498$.

2.3 Transformation d'expressions trigonométriques

Le problème consistant à calculer des sommes de fonctions trigonométriques est un problème central dans les applications. Le cadre général de la solution de ce problème

est celui des nombres complexes, et nous le traiterons dans le chapitre 3, sections 3.6 et 3.7. Des solutions élémentaires sont possibles dans certains cas particuliers. Entre autres, on peut parfois utiliser les formules de transformation de sommes en produits (Exercice 2.12).

Dans cette section, nous montrons comment les formules d'addition permettent de transformer des fonctions de la forme $f(x) = a \sin x + b \cos x$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Une telle expression s'appelle une *combinaison linéaire* de $\sin x$ et $\cos x$. Plus généralement, une combinaison linéaire des éléments $A, B, \dots$ (quels que soient ces éléments : fonctions, vecteurs, nombres, ...) est une expression de la forme $\mathcal{L} = aA + bB + \dots$, où $a, b, \dots$ sont des nombres réels. Cette définition est approximative et sera précisée dans le module 6. Mais nous en rencontrerons auparavant de nombreux exemples.

Revenons donc à une combinaison linéaire des fonctions sinus et cosinus, de la forme $f(x) = a \sin x + b \cos x$, et mettons en facteur $\sqrt{a^2 + b^2}$. Il vient

$$f(x) = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right). \quad (2.2)$$

Posons $\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Il est clair que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donc le point $M(\alpha, \beta)$ appartient au cercle trigonométrique. Il existe donc un nombre réel φ (déterminé à 2π près) tel que

$$\alpha = \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \beta = \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

En reportant dans $f(x)$ et en utilisant la formule d'addition pour le sinus, on obtient

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi). \quad (2.3)$$

De même, posons $\alpha = \sin \psi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\beta = \cos \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

En utilisant la formule d'addition pour le cosinus, on obtient

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \psi + \sin x \sin \psi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \psi). \quad (2.4)$$

On a donc démontré le théorème suivant :

Théorème 2.5 *Pour tout couple de réels $(a, b) \neq (0, 0)$, il existe un réel φ et un réel ψ , déterminés à 2π près, tels que*

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \psi).$$

Exemple 2.5 Transformer $f(x) = \sin x + \cos x$. Ici on a $a = 1, b = 1$ et $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Donc $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Ainsi $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, car $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin b \sin a$.

Puisque $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on a aussi $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. On aurait pu d'ailleurs aboutir directement à ce résultat en faisant apparaître la formule d'addition $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Exemple 2.6 Ecrire $y = 3 \sin x + 2 \cos x$ sous la forme $A \sin(x + \theta)$. Ici $a = 3$ et $b = 2$, donc $A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$. Ainsi

$$\begin{aligned} 3 \sin x + 2 \cos x &= \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{13}} \cos x \right) \\ &= \sqrt{13} (\sin x \cos \theta + \sin \theta \sin x) = \sqrt{13} \sin(x + \theta), \end{aligned}$$

avec $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$, d'où $\theta = \arctan \frac{2}{3} \approx 0,588$.

2.4 Coordonnées polaires du plan

Définition 2.4 Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées polaires r et θ du point $M(x, y)$ sont définies par

$$r = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = (\vec{i}, \widehat{\vec{OM}}).$$

x et y sont appelées les *coordonnées cartésiennes* du point M . Si $r \neq 0$, c'est-à-dire si M est différent du pôle O , l'angle θ (*angle polaire* du point M) est déterminé à 2π près.

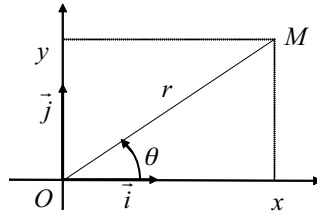


Figure 2.9

Par définition du sinus et du cosinus, on a les formules fondamentales

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta. \quad (2.5)$$

Réciproquement, il est clair que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}. \quad (2.6)$$

Exemple 2.7 Trouver les coordonnées polaires du point M de coordonnées cartésiennes $x = -1, y = 1$.

On a $r = \sqrt{2}$, $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc $\theta = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

Exemple 2.8 Trouver les coordonnées polaires du point M de coordonnées cartésiennes $x = -2, y = -3$.

On a $r = \sqrt{13}$, $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$ et $\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Donc $\theta = \arctan \frac{3}{2} + \pi [2\pi]$ en vertu du théorème 2.4.

2.5 Fonctions sinusoïdales

Définition 2.5 On appelle fonction sinusoïdale toute fonction de la variable t de la forme

$$x = x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \text{ ou } y = y(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.7)$$

Ici $A > 0$ s'appelle l'*amplitude*, $\omega > 0$ s'appelle la *pulsation*, et $\varphi \in \mathbb{R}$ s'appelle le *déphasage*.

Théorème 2.6 Les fonctions $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ et $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ sont périodiques, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Démonstration Exercice 2.13.

La représentation graphique de la fonction $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ s'appelle une *sinusoïde* (Figure 2.10). Elle est liée au mouvement circulaire uniforme sur le cercle de centre O de rayon A . Dans ce cas, ω s'appelle la *vitesse angulaire*, et φ est l'angle polaire du point $M = M(t)$ à l'instant $t = 0$. Il en est bien sûr de même de la fonction $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Voir la figure 2.11 et l'animation sur notre site Internet.

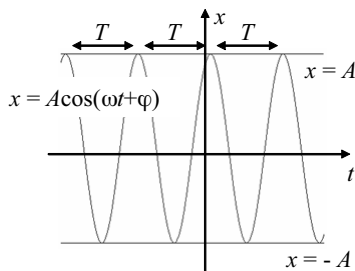


Figure 2.10

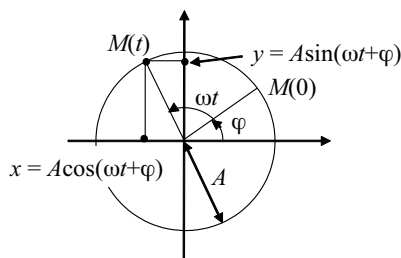


Figure 2.11

Lorsque t varie, le cosinus oscille entre -1 et 1 , donc x varie entre $-A$ et A . Les maxima et les minima se succèdent à intervalles $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ils s'obtiennent en résolvant l'équation $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ ou $\cos(\omega t + \varphi) = -1$.

On rencontre également des fonctions dites *pseudo-sinusoïdales*, dans lesquelles l'amplitude est elle-même une fonction de t , c'est-à-dire par exemple

$$x = x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi).$$

Dans ce cas, la représentation graphique de x est limitée par $-A(t)$ et $A(t)$ (au lieu des amplitudes constantes $-A$ et A), voir la figure 2.12. Les points de contact des courbes représentatives de $x = x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi)$ et $x = A(t)$ se succèdent à intervalles de longueur $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Ils s'obtiennent de nouveau en résolvant l'équation $\cos(\omega t + \varphi) = 1$.

Alors $T = \frac{2\pi}{\omega}$ s'appelle la *pseudo-période* de x .

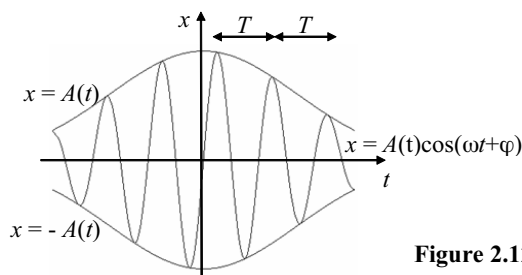


Figure 2.12

Exercices

Les basiques

Exercice 2.1 (B,C) 1) Ecrire $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ sous la forme $A \sin(x + \varphi)$.

2) Résoudre l'équation d'inconnue x : $\sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{2}$.

Exercice 2.2 (A,B,C) Soit $y = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$. Ecrire y sous la forme $A \cos(2t + \varphi)$. On exprimera φ à l'aide de la fonction arctangente, puis on en donnera une valeur numérique à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2.3 (A,B,C) Soit $y = -2 \sin t + \cos t$. Ecrire y sous la forme $A \sin(t + \theta)$. On exprimera θ à l'aide de la fonction arctangente, puis on en donnera une valeur numérique à l'aide de la calculatrice.

Exercice 2.4 (A,B) En utilisant les fonctions trigonométriques réciproques, trouver x , y et z vérifiant : a) $x \in [0, \pi]$ et $\sin x = \frac{1}{3}$; b) $y \in [0, \pi]$ et $\cos y = \frac{3}{5}$; c) $z \in [-\pi, 0]$ et $\tan z = 2$.

Exercice 2.5 (B,D) Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A de coordonnées cartésiennes $x = 1$ et $y = 1$.

1) Calculer les coordonnées polaires r et θ de A .

2) Soit A' l'image de A par la rotation de centre O d'angle $+\frac{\pi}{3}$ (voir figure 2.13). Déterminer les coordonnées polaires de A' .

3) Trouver les coordonnées cartésiennes x' et y' de A' .

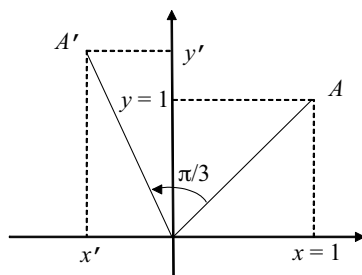


Figure 2.13

Exercice 2.6 (A,B,D) Trouver les coordonnées polaires des points suivants en utilisant la fonction arctangente.

Dans chaque cas, on effectuera l'application numérique.

- 1) M_1 de coordonnées cartésiennes $x_1 = 2$, $y_1 = 3$.
- 2) M_2 de coordonnées cartésiennes $x_2 = -1$, $y_2 = 3$.
- 3) M_3 de coordonnées cartésiennes $x_3 = -2$, $y_3 = -1$.

Exercice 2.7 (E) 1) Soit la fonction sinusoïdale $y = \cos 2t$. Trouver sa pulsation ω , sa période T , et la représenter graphiquement sur l'intervalle $[-2\pi, +2\pi]$.

- 2) En déduire la représentation graphique de la fonction $y = \cos 2t + 1$, puis celle de $y = \cos^2 t$ sur $[-2\pi, +2\pi]$.
- 3) En utilisant un déphasage, donner l'allure de la représentation graphique de la fonction $y = \sin^2 t$.

Exercice 2.8 (E) 1) Soient les fonctions $A(t) = 2 \cos(\frac{\pi}{2}t)$ et $f(t) = \sin(2\pi t)$. Déterminer leurs pulsations, leurs périodes, et tracer leurs représentations graphiques sur $[-6, 6]$ (même graphique).

- 2) On considère maintenant les fonctions sinusoïdales $y_1 = \sin(\frac{5\pi}{2}t)$ et $y_2 = \sin(\frac{3\pi}{2}t)$.
 - a) Exprimer $y = y_1 + y_2$ en fonction de $A(t)$ et $f(t)$.
 - b) Donner l'allure de la représentation graphique de y sur $[-6, 6]$ (phénomène de *battements*).

Les techniques

Exercice 2.9 1) Expliquer pourquoi $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$ à l'aide du cercle trigonométrique, .

- 2) Calculer $\arcsin(\sin \frac{3\pi}{4})$. A-t-on $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?
- 3) A quelle condition sur x a-t-on $\arcsin(\sin x) = x$?
- 4) Démontrer que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
- 5) Résoudre l'équation d'inconnue x : $\arcsin x + \arcsin \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.10 Calculer $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.

Exercice 2.11 Soit $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, tel que $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

- 1) Calculer $\cos 2\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 4\alpha + \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$.
- 2) Factoriser $\cos 4\alpha + \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$. En déduire la valeur de α .

Exercice 2.12 Transformer $\sin x + \cos x$ en utilisant une formule de transformation de somme en produit.

Exercice 2.13 Démontrer le théorème 2.6.

Les exotiques et les olympiques

Exercice 2.14 Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x - k(\sin^4 x + \cos^4 x)$. Montrer que $f(x) = A \cos(4x) + B$, où A et B sont des constantes qui dépendent de k . En déduire les valeurs de k pour lesquelles l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

Chapitre 3

Nombres complexes et trigonométrie

Ce chapitre est essentiellement consacré aux applications de la forme exponentielle des nombres complexes aux calculs trigonométriques. Ces applications sont notamment d'une importance fondamentale en physique. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Savoir passer facilement de la forme algébrique à la forme exponentielle des nombres complexes, et réciproquement.
- B. Connaître et savoir utiliser la formule de De Moivre.
- C. Connaître et savoir utiliser les formules d'Euler.
- D. Savoir calculer des sommes trigonométriques en utilisant les nombres complexes.

3.1 Forme algébrique des nombres complexes

On note i un symbole vérifiant $i^2 = -1$. Les *nombres complexes* sont les nombres de la forme $z = x + iy$, où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le nombre réel x s'appelle la *partie réelle* de z et on note $x = \operatorname{Re}(z)$.

De même, le nombre réel y s'appelle la *partie imaginaire* de z et on note $y = \operatorname{Im}(z)$. Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ et $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$.

Par définition, le *conjugué* de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ et

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z). \quad (3.1)$$

L'écriture $z = x + iy$ s'appelle la *forme algébrique* du nombre complexe z .

On définit la *somme* de $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ de manière naturelle, en additionnant les parties réelles et imaginaires :

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y').$$

Le *produit* de z et z' utilise la propriété $i^2 = -1$:

$$zz' = (x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Enfin, pour obtenir la forme algébrique du *quotient* z/z' , on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur. En développant, il vient pour $z' \neq 0$

$$\frac{z}{z'} = \frac{x + iy}{x' + iy'} = \frac{(x + iy)(x' - iy')}{(x' + iy')(x' - iy')} = \frac{(xx' + yy') + i(xy' - x'y)}{x'^2 + y'^2}.$$

A partir de ces formules, on vérifie aisément que

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}. \quad (3.2)$$

Si on en restait là, les nombres complexes seraient d'une utilité très limitée. Le plus remarquable, en fait, est qu'ils sont *bi-dimensionnels*. Leur représentation dans le *plan complexe* autorise à les écrire sous forme trigonométrique, et c'est la coexistence des deux formes algébrique et trigonométrique qui leur confère leurs remarquables propriétés.

3.2 Plan complexe et forme trigonométrique

On peut représenter les nombres complexes dans le plan rapporté à un repère ortho-normé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en associant à tout nombre complexe $z = x + iy$ le point M de coordonnées cartésiennes (x, y) .

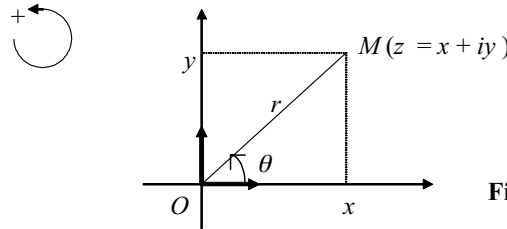


Figure 3.1

On dit que le point M est le *représentant* (ou *image*) du nombre complexe z dans le *plan complexe* et que z est l'*affiche* de M .

Introduisons les coordonnées polaires r et θ du point M (figure 3.1). Alors r s'appelle le *module* du nombre complexe z et se note $|z|$, tandis que θ s'appelle son *argument* et se note $\arg z$. On notera que l'argument de z n'existe que si $z \neq 0$, et qu'il est déterminé à 2π près.

Dans les applications, il sera fondamental de savoir calculer rapidement le module et l'argument d'un nombre complexe.

Pour le module, on a d'abord $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ par le théorème de Pythagore. Puisque $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, on en déduit que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Nous pouvons donc énoncer le

Théorème 3.1 Si $z = x + iy$, alors son module vaut

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Par ailleurs, en utilisant les formules de passage des coordonnées polaires (r, θ) aux coordonnées cartésiennes (x, y) , on a $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, d'où on déduit :

$$z = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta). \quad (3.3)$$

C'est la *forme trigonométrique* du nombre complexe z . Par *identification des parties réelle et imaginaire* dans la formule (3.3), on obtient le

Théorème 3.2 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$. Alors son argument $\theta = \arg z$ est donné par

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Exemple 3.1 Mettre sous forme trigonométrique $z = 1 + i$.

On a d'abord $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Puis

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc $\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et $z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

Le module et l'argument prennent toute leur valeur grâce à la *forme exponentielle* des nombres complexes, introduite par Leonhard Euler (1707-1783).

3.3 Exponentielle complexe

On définit l'*exponentielle complexe* en posant, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (3.4)$$

Cette définition est justifiée par le fait que l'exponentielle complexe vérifie la même *propriété fondamentale* que l'exponentielle réelle :

Théorème 3.3 Pour tous θ et θ' réels, on a $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

Démonstration Il suffit de faire le calcul en utilisant la *définition* de l'exponentielle complexe et les formules d'addition de la trigonométrie :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i (\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta) \\ &= \cos (\theta + \theta') + i \sin (\theta + \theta') = e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

De la propriété fondamentale on déduit facilement deux corollaires.

Corollaire 3.1 Pour tous θ et θ' réels, on a

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \text{et} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}.$$

Corollaire 3.2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Sous forme trigonométrique, cette relation s'écrit

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

et elle est connue sous le nom de *formule de De Moivre*.

La démonstration des corollaires 3.1 et 3.2 est laissée au lecteur (Exercices 3.1 et 3.2). Un autre résultat simple mais important est le suivant :

Théorème 3.4 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

Démonstration $\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$.

Le théorème 3.4 sert notamment à calculer les *modules* de nombres complexes qui apparaissent sous la forme d'une *somme d'exponentielles complexes*, grâce à la formule $|z|^2 = z\bar{z}$ (Théorème 3.1).

Exemple 3.2 Soit $z = Ae^{i\varphi} + Be^{i\psi}$, avec $A, B, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Pour calculer $|z|$, on part de $|z|^2 = z\bar{z}$, d'où

$$|z|^2 = (Ae^{i\varphi} + Be^{i\psi}) \overline{(Ae^{i\varphi} + Be^{i\psi})} = (Ae^{i\varphi} + Be^{i\psi}) (\overline{Ae^{i\varphi}} + \overline{Be^{i\psi}}).$$

Or A et B sont réels, donc $\overline{A} = A$ et $\overline{B} = B$. Ainsi

$$|z|^2 = (Ae^{i\varphi} + Be^{i\psi}) (Ae^{-i\varphi} + Be^{-i\psi})$$

en vertu du théorème 3.4. Ensuite, on développe en utilisant la propriété fondamentale de l'exponentielle complexe (Théorème 3.3) :

$$\begin{aligned} |z|^2 &= A^2 + B^2 + AB \left(e^{i(\varphi-\psi)} + e^{i(\psi-\varphi)} \right) \\ &= A^2 + B^2 + AB \left(e^{i(\varphi-\psi)} + e^{-i(\varphi-\psi)} \right). \end{aligned}$$

Enfin, on observe dans la parenthèse la somme du complexe $e^{i(\varphi-\psi)}$ et de son conjugué $e^{-i(\varphi-\psi)}$ (Théorème 3.4 et Corollaire 3.1). En utilisant (3.1), on obtient

$$|z|^2 = A^2 + B^2 + 2AB \operatorname{Re} \left(e^{i(\varphi-\psi)} \right) = A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi - \psi).$$

D'où finalement $|z| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\varphi - \psi)}$.

3.4 Forme exponentielle des nombres complexes

Soit z un nombre complexe non nul. Posons $r = |z|$ et $\theta = \arg z$.
On a donc, en utilisant l'exponentielle complexe,

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}. \quad (3.5)$$

L'écriture $z = r e^{i\theta}$ s'appelle la *forme exponentielle* du nombre complexe z . Elle fait apparaître clairement le module et l'argument de z et elle est très bien adaptée aux problèmes *multiplicatifs*. Soit en effet $z' \neq 0$, de module r' et d'argument θ' . On a $zz' = r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta+\theta')}$.

Donc $|zz'| = rr'$ et $\arg(zz') = \theta + \theta'$, c'est-à-dire :

Théorème 3.5 Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $z' \in \mathbb{C}^*$,

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|, \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

De même, il est clair qu'on a le

Théorème 3.6 Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $z' \in \mathbb{C}^*$,

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}.$$

Nous reparlerons ultérieurement (Section 7.5) de l'interprétation géométrique de la somme et du produit de deux nombres complexes. Pour l'instant, nous nous contenterons d'insister sur le fait que la forme liée au module et à l'argument (exponentielle complexe) se prête particulièrement bien aux *multiplications* et *divisions* de nombres complexes.

Exemple 3.3 Soit à calculer $z = (1 - i)^9$. Il s'agit clairement de multiplications. On utilise donc l'exponentielle complexe. On a $|1 - i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.
Donc

$$(1 - i)^9 = \left(\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^9 = \left(\sqrt{2}\right)^9 \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^9 = \left(\sqrt{2}\right)^8 \sqrt{2} e^{-i\frac{9\pi}{4}}.$$

Mais $(\sqrt{2})^8 = 2^4 = 16$ et $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$.

De plus, il est clair que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$e^{i(\theta+2k\pi)} = \cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi) = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}. \quad (3.6)$$

Par conséquent $(1 - i)^9 = 2^4 \sqrt{2} e^{-i(\frac{\pi}{4}+2\pi)} = 16\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 16(1 - i)$.

3.5 Formules d'Euler et linéarisation

Soit $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. On sait que $\bar{z} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$. Donc

$$\cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (3.7)$$

Ce sont les *formules d'Euler*. On les utilise essentiellement pour *linéariser* les polynômes trigonométriques, c'est-à-dire pour transformer des sommes de produits de fonctions trigonométriques en combinaisons linéaires de fonctions trigonométriques.

Exemple 3.4 On a vu comment on pouvait linéariser $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en utilisant les formules de duplication [Formules (1.13)]. On peut aussi utiliser les formules d'Euler. Pour $\cos^2 x$, par exemple, on obtient

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{ix} + e^{-ix})^2 = \frac{1}{4} (e^{2ix} + e^{-2ix} + 2).$$

Or $e^{2ix} + e^{-2ix} = e^{2ix} + \overline{e^{2ix}} = 2 \operatorname{Re}(e^{2ix}) = 2 \cos 2x$. Donc

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).$$

Exemple 3.5 Linéarisons $\sin^3 t$.

On utilise le fait que, pour tout couple de complexes (a, b) ,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (3.8)$$

Cette *identité remarquable* se vérifie facilement. On a

$$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it})$$

On regroupe les exponentielles complexes en couples $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$:

$$\begin{aligned} \sin^3 t &= -\frac{1}{8i} [(e^{3it} - e^{-3it}) - 3(e^{it} - e^{-it})] \\ &= -\frac{1}{8i} [2i \sin 3t - 3 \cdot 2i \sin t]. \end{aligned}$$

Après mise en facteur de $2i$ et simplification par $2i$, on obtient

$$\sin^3 t = -\frac{1}{4} [\sin 3t - 3 \sin t].$$

3.6 Sommes trigonométriques et complexes

Par définition de l'exponentielle complexe, on a

$$\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}), \quad \sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) \quad (3.9)$$

Ces formules sont très simples, mais d'utilisation fréquente. Elles s'utilisent pour calculer certaines sommes trigonométriques. Un exemple classique est le suivant, basé sur la formule

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad (3.10)$$

qui est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$. Cette formule est à connaître, mais il faut surtout *savoir la retrouver* rapidement. On procède comme suit.

Posons $S = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$. En multipliant par z , on voit que

$$zS = z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n+1}.$$

Par soustraction de ces deux égalités, tous les termes intermédiaires $z, z^2, \dots, z^n$ disparaissent, et il vient $S - zS = 1 - z^{n+1}$. D'où $(1 - z)S = 1 - z^{n+1}$ et (3.10).

Exemple 3.6 Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq 2k\pi$.

Pour calculer $S_n = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$, on écrit

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \operatorname{Re}(e^{i\theta}) + \operatorname{Re}(e^{2i\theta}) + \dots + \operatorname{Re}(e^{ni\theta}) \\ &= \operatorname{Re}[1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{ni\theta}] \\ &= \operatorname{Re}\left[1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + \dots + (e^{i\theta})^n\right]. \end{aligned}$$

On peut utiliser la formule (3.10) avec $z = e^{i\theta}$. En effet $z \neq 1$ car $\theta \neq 2k\pi$ par hypothèse. On a donc

$$S_n = \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right].$$

Pour calculer cette partie réelle, donnons d'abord la *méthode générale*, celle que l'on peut appliquer dans toutes les situations de ce type. On cherche la partie réelle d'un quotient. On multiplie donc numérateur et dénominateur par le *conjugué* du dénominateur :

$$S_n = \operatorname{Re} \left[\frac{(1 - e^{i(n+1)\theta})(1 - e^{-i\theta})}{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta} - e^{-i\theta} + e^{in\theta}}{2(1 - \cos \theta)} \right]$$

(voir Exemple 3.2 pour le dénominateur). On en déduit que

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{1 - \cos(n+1)\theta - \cos \theta + \cos n\theta}{2(1 - \cos \theta)}.$$

On peut aussi utiliser, dans le cas particulier de *cette* somme S_n , une *astuce de calcul* : elle consiste à mettre en facteur les exponentielles complexes de la moitié au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned} S_n &= \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \left(e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{-2i \sin \frac{n+1}{2}\theta}{-2i \sin \frac{\theta}{2}} \right] = \cos \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Les deux expressions de S_n apparaissent différentes. Mais bien sûr, elles sont égales. On peut passer de l'une à l'autre en utilisant des formules de trigonométrie (Exercice 1.18).

3.7 Sommes de fonctions sinusoïdales

On est parfois amené à additionner (superposer) des fonctions sinusoïdales *de même pulsation*. Nous expliquons le principe du calcul dans le cas de la somme

$$u = a \cos(\omega t + \varphi) + b \cos(\omega t + \psi),$$

où a et b sont des nombres réels positifs non nuls. L'idée de base est la même que dans la section 3.6. On écrit

$$u = a \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega t + \varphi)} \right) + b \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega t + \psi)} \right) = \operatorname{Re} \left(a e^{i(\omega t + \varphi)} + b e^{i(\omega t + \psi)} \right).$$

En utilisant la propriété fondamentale de l'exponentielle complexe, il vient

$$u = \operatorname{Re} \left(a e^{i\omega t} e^{i\varphi} + b e^{i\omega t} e^{i\psi} \right) = \operatorname{Re} \left[(a e^{i\varphi} + b e^{i\psi}) e^{i\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left(Z e^{i\omega t} \right),$$

où $Z = a e^{i\varphi} + b e^{i\psi}$ est un nombre complexe *indépendant* de la variable t . En fait Z ne dépend que des amplitudes a et b et des déphasages φ et ψ . Notons A le *module* de Z et θ son *argument*. On a $Z = A e^{i\theta}$, et par conséquent

$$u = \operatorname{Re} \left(A e^{i\theta} e^{i\omega t} \right) = \operatorname{Re} \left(A e^{i(\omega t + \theta)} \right) = A \cos(\omega t + \theta). \quad (3.11)$$

Nous avons donc démontré le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.7 *La somme de deux fonctions sinusoïdales de pulsation ω est une fonction sinusoïdale de pulsation ω .*

Naturellement, ce résultat demeure vrai pour la somme d'un nombre quelconque de fonctions sinusoïdales de même pulsation. Notons que la démonstration du théorème 3.7 est *constructive*, c'est-à-dire qu'elle permet, dans la pratique, de calculer l'amplitude et le déphasage de la somme. Nous donnons un exemple avec une somme de deux sinus.

Exemple 3.7 Soit $u = \sin \omega t + 2 \sin(\omega t + \varphi)$, où $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

On reprend le calcul précédent dans ce cas particulier. On a

$$u = \operatorname{Im} \left(e^{i\omega t} + 2e^{i(\omega t + \varphi)} \right) = \operatorname{Im} \left[e^{i\omega t} (1 + 2e^{i\varphi}) \right]$$

Posons $Z = 1 + 2e^{i\varphi} = 1 + 2 \cos \varphi + 2i \sin \varphi$. Le module de Z vaut

$$A = |Z| = \sqrt{Z \bar{Z}} = \sqrt{(1 + 2e^{i\varphi})(1 + 2e^{-i\varphi})} = \sqrt{5 + 4 \cos \varphi}. \quad (3.12)$$

Soit $\theta = \arg Z$ l'argument de Z . On sait que

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{Re} Z}{|Z|} = \frac{1 + 2 \cos \varphi}{\sqrt{5 + 4 \cos \varphi}}, \quad \sin \theta = \frac{\operatorname{Im} Z}{|Z|} = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{5 + 4 \cos \varphi}}.$$

Les valeurs obtenues ne sont pas des valeurs usuelles, on écrit donc

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2 \sin \varphi}{1 + 2 \cos \varphi}.$$

Puisque $\varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cos \theta > 0$. Par suite (Théorème 2.4), on a

$$\theta = \arctan \left(\frac{2 \sin \varphi}{1 + 2 \cos \varphi} \right). \quad (3.13)$$

Finalement, on a donc $u = \operatorname{Im} (Ze^{i\omega t}) = \operatorname{Im} (Ae^{i(\omega t + \theta)}) = A \sin(\omega t + \theta)$, où A et θ sont donnés par (3.12) et (3.13) respectivement.

Exercices

Les basiques

Exercice 3.1 (A) Démontrer le corollaire 3.1.

Exercice 3.2 (A) Démontrer le corollaire 3.2 (formule de De Moivre).

Exercice 3.3 (A) Ecrire sous forme algébrique :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}}$. b) $e^{i\frac{\pi}{4}}$. c) $e^{i\frac{\pi}{2}}$. d) $e^{i\pi}$. e) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$. f) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$. g) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$. h) $e^{-i\pi}$.

Exercice 3.4 (A) Ecrire sous forme d'exponentielle complexe :

a) i . b) $-i$. c) $1 + i$. d) $1 - i$. e) $\frac{1}{i}$. f) $\sqrt{3} + i$. g) $\sqrt{3} - i$.

Exercice 3.5 (A,B) 1) Trouver le module et l'argument de

$$j = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

2) Calculer $1 + j + j^2$ en utilisant la forme exponentielle de j .

3) Calculer $z = j^{13}$. On donnera le résultat final sous forme algébrique.

Exercice 3.6 (A) Soient $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

1) Calculer le module et l'argument de Z_1, Z_2 . En déduire $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme exponentielle.

2) Calculer le complexe $\frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3.7 (B) En utilisant la formule de De Moivre, montrer que

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta ; \quad \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.$$

Exercice 3.8 (C) Linéariser $\sin^2 t$ et $\cos^3 t$ grâce aux formules d'Euler.

Exercice 3.9 (D) En utilisant les exponentielles complexes, démontrer que

$$\cos \omega t + 2 \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) = A \cos(\omega t + \varphi), \text{ avec } A = \sqrt{7} \text{ et } \varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 3.10 (D) 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \neq 1$. Démontrer que

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

2) Calculer $S_n = \sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$ en utilisant les exponentielles complexes.

Exercice 3.11 (C) Linéariser $f(t) = \sin^3 2t \cos^2 t$.

Exercice 3.12 (D) Soit $\varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les exponentielles complexes, calculer la somme

$$\sigma_n = 1 + \frac{\cos \varphi}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2^2} + \cdots + \frac{\cos n\varphi}{2^n}.$$

Les techniques

Exercice 3.13 1) Démontrer que $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$. En déduire le module et l'argument de $z_1 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$, avec $\theta \in]0, \pi[$.

2) Déterminer de même le module et l'argument de $z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$.

3) Simplifier $Z = z_1/z_2$.

Exercice 3.14 Soit la fonction $f(t) = \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$, où ω est un nombre réel, tandis que λ et μ sont des nombres complexes.

1) Quelle condition doivent vérifier λ et μ pour que $f(t)$ soit une fonction réelle ?

2) Montrer que, dans ce cas, $f(t)$ peut se mettre sous la forme $A \cos(\omega t + \varphi)$ et exprimer A et φ en fonction des données.

Exercice 3.15 Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, avec $z_1 z_2 \neq -1$. Démontrer que

$$|z_1| = |z_2| = 1 \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.16 Soient x, y et z trois nombres complexes de module 1.

Comparer les modules des nombres $x + y + z$ et $xy + yz + zx$.

Exercice 3.17 Soient a et b de module 1, $a \neq b$, et $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z + ab\bar{z} - a + b}{a - b} \right) = -1.$$

Les exotiques et les olympiques

Exercice 3.18 Un entier n est dit somme de deux carrés s'il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.

1) Montrer que si n et p sont sommes de deux carrés alors leur produit np est aussi une somme de deux carrés.

2) Par exemple on a $5 = 2^2 + 1^2$, $401 = 20^2 + 1^2$, quelle est la décomposition en somme de deux carrés de 2005 ?

Exercice 3.19 Soit z un complexe tel que $|1 + z + z^2 + \dots + z^9| = 1$ et $|z| = 1$. Montrer que $z^9 = 1$ ou $z^{11} = 1$.

Exercice 3.20 Soit $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Calculer

$$S = \sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha + \dots + \sin(n-2)\alpha \sin(n-1)\alpha.$$

Exercice 3.21 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \quad \text{et} \quad \sin a + \sin b + \sin c = 0.$$

Montrer que $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0$ et $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$.

Chapitre 4

Introduction aux déterminants

Les déterminants sont un outil très pratique. Nous les utiliserons notamment pour exprimer le produit vectoriel et le produit mixte, ainsi que pour résoudre les systèmes d'équations linéaires à deux ou trois inconnues. C'est dans le cadre de ce dernier problème qu'ils sont apparus au dix-huitième siècle, à la suite des travaux d'Alexandre Vandermonde (1735-1796). Si l'utilisation des déterminants d'ordre 2 ou 3 (les plus utiles) est simple, la démonstration des résultats généraux est compliquée (voir chapitre 28). Nous admettrons donc la plupart des résultats de ce chapitre introductif. Après l'avoir étudié, vous devez :

- A.** Connaître les propriétés générales des déterminants et savoir les utiliser pour calculer les déterminants d'ordre 2, 3 ou 4 essentiellement.
- B.** Connaître la règle de Sarrus pour les déterminants d'ordre 3.
- C.** Connaître les formules de Cramer et savoir les utiliser pour résoudre des systèmes d'équations linéaires à deux ou trois inconnues.

4.1 Qu'est-ce qu'un déterminant ?

Nous nous contenterons d'une définition très vague, que nous illustrerons par des exemples : *un déterminant est un nombre réel ou complexe défini par un tableau carré de nombres réels ou complexes*, encadré par deux barres verticales, et qui se calcule à partir de certaines règles. La méthode de calcul général se fera de proche en proche. Nous commençons donc par définir les déterminants d'ordre 2.

Exemple 4.1 Un déterminant d'ordre 2 est défini par

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (4.1)$$

Ainsi, par exemple, on a $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times (-1) = 13$.

Exemple 4.2 Un déterminant d'ordre 3 est défini par un tableau de nombres à trois lignes et trois colonnes :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}. \quad (4.2)$$

Nous expliquerons plus loin comment on calcule le déterminant d'ordre 3 ci-dessus. Plus généralement, un déterminant d'ordre n sera défini par un tableau carré à n lignes et n colonnes. Les nombres figurant dans le déterminant seront repérés par deux *indices*, le premier indiquant la *ligne* et le deuxième la *colonne*. Les nombres du tableau sont encadrés par des barres verticales. Ainsi la notation générale d'un déterminant sera

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Nous considérerons aussi fréquemment Δ comme constitué de n colonnes $C_1, C_2, \dots, C_n$, ou de n lignes $L_1, L_2, \dots, L_n$, ce qu'on peut noter

$$\Delta = \Delta(C_1, C_2, \dots, C_n) = \Delta(L_1, L_2, \dots, L_n). \quad (4.4)$$

4.2 Calcul pratique des déterminants

Définition 4.1 Soit Δ un déterminant d'ordre n , et soit a_{ij} l'élément de Δ situé à la i -ème ligne et à la j -ième colonne. Le mineur de a_{ij} est le déterminant A_{ij} d'ordre $n - 1$ obtenu en supprimant la i -ème ligne et la j -ième colonne de Δ .

Exemple 4.3 Soit le déterminant d'ordre 4 défini par

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Le mineur $A_{2,3}$ de l'élément $a_{2,3}$, par exemple, qui est situé à la ligne 2 et la colonne 3 de Δ , s'obtient en supprimant la ligne 2 et la colonne 3 de Δ . Ainsi

$$A_{2,3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{\phantom{a_{13}}} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{\phantom{a_{33}}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & \boxed{\phantom{a_{43}}} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Le calcul d'un déterminant d'ordre n se fait par *développement par rapport à une ligne ou une colonne*, à partir du théorème suivant, que nous admettons, et allons expliquer sur un exemple.

Théorème 4.1 Soit Δ défini par (4.3). Alors, pour toute ligne i et toute colonne j de Δ , on a

$$\Delta = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}. \quad (4.5)$$

Pratiquement, pour calculer Δ , on *choisit* une ligne (ce qui correspond à une valeur de i fixée dans la première somme) ou une colonne (ce qui correspond alors à une valeur de j fixée dans la deuxième somme). On multiplie chaque élément a_{ij} de cette ligne (ou de cette colonne) par son mineur A_{ij} , on met devant un signe $+$ ou $-$ correspondant au $(-1)^{i+j}$, et on additionne le tout.

Ce $(-1)^{i+j}$ correspond au signe $+$ si $i+j$ est pair, et au signe $-$ si $i+j$ est impair. Pour l'élément a_{11} situé *en haut à gauche* de Δ , on a $i=1, j=1, i+j=2$ et le signe est donc $+$. Chaque fois qu'on augmente de 1 le numéro de ligne (ou le numéro de colonne), $i+j$ augmente de 1, donc *change de parité* : ainsi $(-1)^{i+j}$ *change de signe*.

Partant de $+$ *en haut à gauche*, le $(-1)^{i+j}$ du théorème 4.1 correspond donc au *tableau de signes* :

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad (4.6)$$

Exemple 4.4 Calculer le déterminant d'ordre 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

en le développant par rapport à sa première colonne. On affecte chacun des nombres de la première colonne du signe $\pm$ suivant la règle des signes (4.6), comme indiqué par le signe $\pm$ placé entre parenthèses en haut et à droite de ces nombres. Puis on les multiplie par les mineurs qui leur correspondent, et on additionne le tout. Il vient

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2^{(+)} & 5 & 2 \\ -1^{(-)} & 1 & -1 \\ 3^{(+)} & 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 9 + 17 + 3 \times (-7) = 14. \end{aligned}$$

Le théorème 4.1, qui est difficile à démontrer, assure que *le résultat est le même quelle que soit la colonne ou la ligne choisie pour développer le déterminant*.

Par exemple, si nous décidons de développer Δ par rapport à sa deuxième ligne, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1^{(-)} & 1^{(+)} & -1^{(-)} \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -(-1) \times \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 14.
\end{aligned}$$

On obtient bien le même résultat.

Le théorème 4.1 permet de même de ramener le calcul d'un déterminant d'ordre 4 au calcul de 4 déterminants d'ordre 3 en le développant par rapport à une de ses lignes ou colonnes, etc.

4.3 Règle de Sarrus

On doit au mathématicien Pierre Sarrus (1798-1861) la découverte d'un moyen simple permettant un autre calcul des déterminants d'ordre 3.

La *règle de Sarrus* consiste à réécrire d'abord les deux premières lignes d'un déterminant d'ordre 3 sous ce déterminant, comme ci-dessous. On multiplie ensuite les trois termes des trois diagonales qui partent de la gauche ; on additionne les résultats obtenus, et on leur soustrait les trois produits de trois termes qu'on obtient grâce aux trois diagonales qui partent de la droite.

$$\begin{array}{ccc}
a & a' & a'' \\
b & b' & b'' \\
c & c' & c'' \\
a & a' & a'' \\
b & b' & b'' \\
c & c' & c''
\end{array}
= ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''.$$

Exemple 4.5 Calculons par la règle de Sarrus le déterminant Δ de l'exemple 4.4. La disposition du calcul sera la suivante :

$$\begin{array}{ccc}
2 & 5 & 2 \\
-1 & 1 & -1 \\
3 & 4 & 5 \\
2 & 5 & 2 \\
-1 & 1 & -1
\end{array}
= 2 \times 1 \times 5 + (-1) \times 4 \times 2 + 3 \times 5 \times (-1) - 2 \times 1 \times 3 - (-1) \times 4 \times 2 - 5 \times 5 \times (-1)$$

Ainsi $\Delta = 10 - 8 - 15 - 6 + 8 + 25 = 14$. On retrouve le même résultat.

On prendra garde que *la règle de Sarrus ne s'applique qu'aux déterminants d'ordre 3*. La *règle générale* de calcul des déterminants est celle du développement par rapport à une ligne ou une colonne (Théorème 4.1).

4.4 Opérations sur les déterminants

Il est facile de voir que le théorème 4.1 conduit, dès que l'ordre du déterminant dépasse 3, à de lourds calculs. Par exemple, si on développe un déterminant d'ordre 4 par rapport à une de ses colonnes sans opérations préalables, cela conduit au calcul de 4 mineurs d'ordre 3. Pour éviter cet inconvénient, on utilise le théorème suivant, que nous admettons.

Théorème 4.2 *La valeur d'un déterminant est inchangée lorsqu'on ajoute à une ligne un multiple d'une autre ligne (ou à une colonne un multiple d'une autre colonne).*

Nous symboliserons par $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ l'opération qui consiste à ajouter la ligne j à la ligne i après l'avoir multipliée par α , et par $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ l'opération qui consiste à ajouter la colonne j à la colonne i après l'avoir multipliée par α .

Ce théorème s'utilise pour "faire apparaître des zéros" dans une ligne ou une colonne d'un déterminant, afin de le développer ensuite par rapport à cette ligne ou cette colonne. Nous donnons un exemple dans le cas d'un déterminant d'ordre 3.

Exemple 4.6 Calculons le déterminant Δ de l'exemple 4.4 en faisant apparaître des zéros dans la deuxième colonne. Pour cela, on utilise par exemple le facteur 1 qui figure dans la deuxième colonne pour faire apparaître des zéros au niveau des deux autres termes de la colonne (encadrés ci-dessous).

On effectue donc les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$ pour faire apparaître un zéro à la place du 5 qui figure ligne 1 colonne 2, puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$ pour faire apparaître un zéro à la place du 4 qui figure ligne 3 colonne 2. Ceci signifie qu'on multiplie la ligne 2 par -5 et qu'on l'ajoute à la ligne 1, puis qu'on multiplie la ligne 2 par -4 et qu'on l'ajoute à la ligne 3. Le détail des calculs est comme suit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \boxed{5} & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & \boxed{4} & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+5 & 5-5 & 2+5 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3+4 & 4-4 & 5+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 9 \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la deuxième colonne, *qui ne compte qu'un seul terme non nul*, il vient maintenant

$$\Delta = 1 \times \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 7 \times (9 - 7) = 14.$$

Bien sûr, d'autres choix auraient été possibles, par exemple $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, suivi de $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. Cela conduit à développer ensuite par rapport à la deuxième ligne et donne un calcul encore plus simple :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -1 & \boxed{1} & \boxed{-1} \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 14.$$

4.5 Intersion de colonnes dans un déterminant

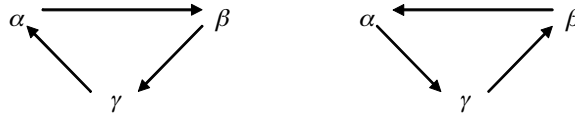
Nous admettons le théorème suivant, qui sera utile essentiellement dans l'étude du produit mixte de deux vecteurs (Section 8.3).

Théorème 4.3 *La valeur d'un déterminant change de signe lorsqu'on intervertit deux de ses colonnes.*

Par exemple, le déterminant d'ordre 4 ci-dessous change de signe lorsqu'on intervertit sa première et sa troisième colonne, ce que nous symboliserons par $C_1 \rightleftharpoons C_3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{14} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{24} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{34} \\ a_{43} & a_{42} & a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (4.8)$$

Considérons maintenant le cas particulier d'un déterminant d'ordre 3. Au lieu d'intervertir deux colonnes, effectuons une *permutation circulaire* des colonnes. La permutation circulaire la plus simple, pour trois éléments α , β , γ , consiste à faire passer α à la place de β , β à la place de γ , et, par un mouvement circulaire, γ à la place de α (ci-dessous à gauche). La deuxième permutation circulaire est l'inverse de la première (ci-dessous à droite) :



Théorème 4.4 *La valeur d'un déterminant d'ordre 3 est inchangée par permutation circulaire de ses colonnes.*

Par exemple, effectuons une permutation circulaire des colonnes du déterminant Δ ci-dessous. La première colonne passe en deuxième position, la deuxième en troisième et la troisième en première. La valeur de Δ est inchangée :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'' & a & a' \\ b'' & b & b' \\ c'' & c & c' \end{vmatrix}. \quad (4.9)$$

Ceci est une conséquence du théorème 4.3 : la permutation circulaire résulte de deux interversions successives, $C_1 \rightleftharpoons C_2$, puis $C_1 \rightleftharpoons C_3$, qui provoquent *deux changements de signe successifs* comme expliqué ci-dessous :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a' & a & a'' \\ b' & b & b'' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'' & a & a' \\ b'' & b & b' \\ c'' & c & c' \end{vmatrix}.$$

On notera que le théorème 4.3 est vrai pour tout déterminant, quel que soit son ordre, alors que le théorème 4.4 ne s'applique qu'aux déterminants d'ordre 3 (comme la règle de Sarrus).

4.6 Formules de Cramer

4.6.1 Systèmes de deux équations à deux inconnues

Soit le système (S_1) de deux équations linéaires à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (S_1)$$

Ce système est dit *linéaire* car les inconnues x et y apparaissent sous forme de *combinaisons linéaires*. On peut le résoudre par combinaison en multipliant la première équation par b' , la deuxième par b , puis en soustrayant membre à membre de façon à éliminer y . On obtient $(ab' - a'b)x = b'c - bc'$. Donc, si $ab' - a'b \neq 0$,

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}. \quad (4.10)$$

De même, on peut éliminer x en multipliant la première équation par a' , la deuxième par a , et en soustrayant. On obtient $(ab' - a'b)y = ac' - a'c$. D'où, si $ab' - a'b \neq 0$,

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}. \quad (4.11)$$

Réciproquement, on vérifie facilement que x et y donnés par (4.10) et (4.11) sont bien solutions de (S_1) . Ces formules générales se retiennent facilement en introduisant des déterminants d'ordre 2 :

Définition 4.2 *Le déterminant du système (S_1) est défini par*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

On le lit directement sur le système (S_1) , car il est formé à partir des coefficients des inconnues x et y , exactement dans l'ordre dans lequel ils figurent dans (S_1) . Introduisons maintenant les déterminants

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad (4.13)$$

obtenus en remplaçant respectivement la première et la deuxième colonne de Δ par le second membre du système. A partir de (4.10) et (4.11), nous voyons que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 4.5 *Si le déterminant du système (S_1) est différent de zéro, ce système admet une solution unique donnée par les formules de Cramer :*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ et } y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \quad (4.14)$$

Un système dont le déterminant est non nul s'appelle un *système de Cramer*. Les formules de Cramer sont très pratiques pour résoudre rapidement les systèmes de deux équations à deux inconnues.

Exemple 4.7 Résoudre le système

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$

Le déterminant du système vaut $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 4 = 19 \neq 0$.

Donc le système est de Cramer et sa solution est le couple (x, y) , avec

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{19} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \frac{22}{19}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{19} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{5}{19}.$$

4.6.2 Systèmes de trois équations à trois inconnues

Considérons maintenant un système (S_2) de trois équations linéaires à trois inconnues x, y, z :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \quad (S_2)$$

Définition 4.3 Le déterminant du système (S_2) est défini par

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Comme pour un système de deux équations à deux inconnues, on le lit directement sur le système (S_2) . Introduisons les déterminants

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

obtenus en remplaçant respectivement la première, la deuxième et la troisième colonne de Δ par le second membre du système. Alors, de même que pour les systèmes de deux équations à deux inconnues, on a le

Théorème 4.6 Si le déterminant du système (S_2) est différent de zéro, ce système admet une solution unique donnée par les formules de Cramer :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \quad (4.17)$$

Démonstration Voir Section 28.4.

Exemple 4.8 Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

On calcule son déterminant, par exemple par la règle de Sarrus :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Le système est de Cramer et admet une solution unique (x, y, z) . On a

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

En utilisant la règle de Sarrus, il vient $\Delta_x = 6$, $\Delta_y = 12$, $\Delta_z = -12$. Ainsi, en appliquant les formules de Cramer, on obtient

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -2.$$

Exercices

Les basiques

Exercice 4.1 (A,B) Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

- 1) Par la règle de Sarrus.
- 2) En le développant par rapport à la première colonne.
- 3) En faisant apparaître des zéros dans la première ligne.

Exercice 4.2 (A,B) Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & x+1 \\ 1 & x+1 & x \\ x+1 & x & 1 \end{vmatrix}$

- 1) Par la règle de Sarrus.
- 2) En le développant par rapport à la deuxième colonne.
- 3) En effectuant d'abord $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$.

Exercice 4.3 (A) Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 4.4 (C) Résoudre par les formules de Cramer le système

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$$

Exercice 4.5 (C) On suppose $U_1 \neq U_2$. Résoudre par les formules de Cramer le système d'inconnues Q_1 et Q_2 :

$$\begin{cases} Q_1 U_1 + Q_2 U_2 = qU \\ Q_1 + Q_2 = q \end{cases}$$

Exercice 4.6 (C) En utilisant les formules de Cramer, résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

Exercice 4.7 (A,B) Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 1 & 2-x & -1 \\ -1 & 1 & 4-x \end{vmatrix}.$$

1) Calculer $D(x)$ par la règle de Sarrus. L'expression obtenue permet-elle de factoriser facilement $D(x)$?

2) Calculer $D(x)$ en effectuant d'abord l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$.

Exercice 4.8 (A) Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$

Les techniques

Exercice 4.9 1) t étant un paramètre réel, calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4t+3 \\ -1 & 2 & 2t^2 \end{vmatrix}.$$

2) Pour quelles valeurs de t le système (S) suivant est-il un système de Cramer ?

$$\begin{cases} x + y + z = t + 1 \\ 2x - y + (4t + 3)z = 0 \\ -x + 2y + 2t^2z = 0 \end{cases} \quad ((S))$$

3) Exprimer les solutions x , y et z du système (S) en fonction de t dans le cas où (S) est un système de Cramer.

On simplifiera au maximum les résultats obtenus.

Exercice 4.10 "Inverser" le système suivant, c'est-à-dire exprimer x , y , z en fonction de x' , y' , z' :

$$\begin{cases} x + y - z = x' \\ 2x + y + z = y' \\ -x - 2y + 3z = z' \end{cases}$$

Exercice 4.11 Démontrer que

$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \sin(a+b) & \sin(b+c) & \sin(c+a) \end{vmatrix} = -2 \sin(a-b) \sin(b-c) \sin(c-a).$$

Chapitre 5

Produit scalaire

Nous définissons et étudions le produit scalaire, en vue des applications en géométrie, en physique et en sciences industrielles. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A. Connaître la définition du produit scalaire et ses principales propriétés.
- B. Savoir utiliser le produit scalaire dans des problèmes de géométrie.
- C. Connaître l'expression analytique du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
- D. Connaître le théorème des projections et savoir effectuer un changement de base orthonormée.

5.1 Projection orthogonale sur un axe orienté

Rappelons qu'un *vecteur* $\vec{u}$ du plan ou de l'espace est un objet défini par sa *direction*, son *sens*, et sa *norme* (ou longueur). On note $\|\vec{u}\|$ la norme du vecteur $\vec{u}$. En géométrie vectorielle, les nombres réels sont appelés des *scalaires*.

Soit maintenant (Δ) un axe orienté du plan ou de l'espace, c'est-à-dire une droite munie d'un vecteur *unitaire* $\vec{e}$ qui permet de "mesurer" les vecteurs de (Δ) . Rappelons qu'un vecteur unitaire (ou *normé*) est un vecteur de norme égale à 1. On a donc $\|\vec{e}\| = 1$. Dans les applications, on est souvent amené à projeter orthogonalement un vecteur donné $\vec{u} \neq \vec{0}$ sur l'axe (Δ) . Nous noterons $p_{\Delta}(\vec{u})$ la *projection orthogonale* de $\vec{u}$ sur (Δ) (Figure 5.1 page suivante). En notant θ l'angle entre $\vec{e}$ et $\vec{u}$, on observe immédiatement que

$$p_{\Delta}(\vec{u}) = (\|\vec{u}\| \cos \theta) \vec{e}. \quad (5.1)$$

En effet, la situation est analogue à la projection orthogonale du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ de la figure 1.1 sur l'axe des cosinus, sauf que ici le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nécessairement de norme 1 : il faut donc multiplier le cosinus de l'angle de projection par $\|\vec{u}\|$.

Soit maintenant α un nombre réel (c'est-à-dire un *scalaire*). La figure 5.2 et le théorème de Thalès montrent que

$$p_{\Delta}(\alpha \vec{u}) = \alpha p_{\Delta}(\vec{u}). \quad (5.2)$$

De même, la figure 5.3 montre que, pour tout couple de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$p_{\Delta}(\vec{u} + \vec{v}) = p_{\Delta}(\vec{u}) + p_{\Delta}(\vec{v}). \quad (5.3)$$

Les formules (5.2) et (5.3) expriment que la projection orthogonale sur un axe orienté est une transformation *linéaire*. Nous n'insistons pas ici sur cette notion, qui sera reprise en détail dans le chapitre 38.

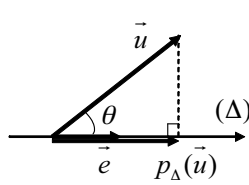


Figure 5.1

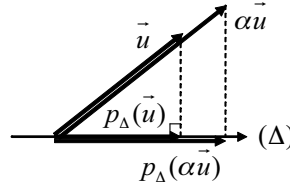


Figure 5.2

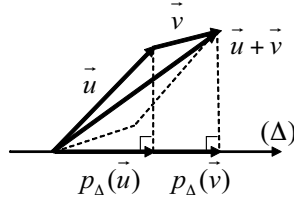


Figure 5.3

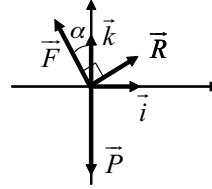


Figure 5.4

Remarque 5.1 Les résultats précédents permettent de *projeter une relation vectorielle sur un axe orienté*. A titre d'exemple, supposons que les vecteurs $\vec{F}$, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ de la figure 5.4 vérifient

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}. \quad (5.4)$$

Si nous projetons cette relation vectorielle sur la verticale (Δ) orientée vers le haut par le vecteur unitaire $\vec{k}$, par exemple, nous obtenons par (5.3) :

$$p_{\Delta}(\vec{F}) + p_{\Delta}(\vec{P}) + p_{\Delta}(\vec{R}) = p_{\Delta}(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Or les angles de projection de $\vec{F}$, $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sur la verticale orientée vers le haut sont respectivement α , π et $\frac{\pi}{2} - \alpha$. On a donc, par (5.1),

$$\left[\|\vec{F}\| \cos \alpha + \|\vec{P}\| \cos \pi + \|\vec{R}\| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \vec{k} = \vec{0},$$

ce qui se traduit immédiatement par la relation scalaire

$$\|\vec{F}\| \cos \alpha - \|\vec{P}\| + \|\vec{R}\| \sin \alpha = 0.$$

Ce type de raisonnement est très fréquent en mécanique, mais s'effectue sans détailler les étapes. Généralement, on note d'abord par des lettres sans flèches les normes des vecteurs. Ainsi

$$F = \|\vec{F}\|, \quad P = \|\vec{P}\|, \quad R = \|\vec{R}\|.$$

A titre d'exemple, projetons la relation vectorielle (5.4) sur l'axe horizontal orienté vers la droite par le vecteur $\vec{i}$. En considérant les angles de la figure 5.4 et l'orientation des différents vecteurs, on obtient $-F \sin \alpha + R \cos \alpha = 0$.

5.2 Produit scalaire et projection orthogonale

Définition 5.1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta, \quad (5.5)$$

où θ désigne la mesure de l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Si l'un des deux vecteurs est nul, l'angle θ n'est pas défini. On pose alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

On observe que $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et que $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ si $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$ (Figures 5.5 et 5.6). En outre, il est clair d'après la définition que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (Figure 5.7).

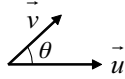


Figure 5.5

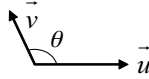


Figure 5.6

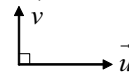


Figure 5.7

Le produit scalaire est lié aux projections orthogonales par le résultat fondamental suivant, connu sous le nom de *théorème des projections* :

Théorème 5.1 Soit (Δ) un axe orienté du plan ou de l'espace, de vecteur unitaire directeur $\vec{e}$. Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur quelconque et $\theta = (\vec{e}, \vec{u})$. Alors

$$p_{\Delta}(\vec{u}) = (\|\vec{u}\| \cos \theta) \vec{e} = (\vec{u} \cdot \vec{e}) \vec{e}. \quad (5.6)$$

Démonstration La première égalité n'est autre que la formule (5.1). La deuxième s'en déduit car $\vec{u} \cdot \vec{e} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{e}\| \cdot \cos \theta = \|\vec{u}\| \cos \theta$ puisque $\|\vec{e}\| = 1$.

Un cas particulier du produit scalaire est celui où $\vec{v} = \vec{u}$. On parle alors de *carré scalaire*. On le note $\vec{u}^2$. Alors $\theta = 0$, donc $\cos \theta = 1$ et

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2. \quad (5.7)$$

Remarque 5.2 Prise en sens inverse, la formule (5.5) qui définit le produit scalaire permet de calculer la mesure de l'angle formé par deux vecteurs non nuls. En effet,

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}. \quad (5.8)$$

5.3 Propriétés algébriques du produit scalaire

La définition du produit scalaire, donnée dans la section précédente, est de nature *géométrique* : elle fait intervenir des vecteurs, des longueurs et des angles. Nous étudions maintenant les propriétés *algébriques* du produit scalaire : elles ne font intervenir que des *règles de calcul*, sans référence à la nature géométrique des objets manipulés. En fait, le produit scalaire a des propriétés communes avec le produit des nombres réels ou complexes.

Théorème 5.2 *Le produit scalaire est commutatif, c'est-à-dire que, pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}. \quad (5.2)$$

En effet, par définition $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{u}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. Si l'un des deux vecteurs est nul, le produit scalaire est nul (Définition 5.1), donc (5.2) reste vraie.

Théorème 5.3 *Le produit scalaire est distributif sur l'addition des vecteurs, c'est-à-dire que, pour tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$,*

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \quad (5.10)$$

Démonstration Si un des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est nul, (5.10) est vraie. Sinon, soit (Δ) l'axe dirigé par $\vec{u}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p_{\Delta}(\vec{v})$ pour tout vecteur $\vec{v}$. En utilisant la formule (5.3), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot p_{\Delta}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot [p_{\Delta}(\vec{v}) + p_{\Delta}(\vec{w})] \\ &= \vec{u} \cdot p_{\Delta}(\vec{v}) + \vec{u} \cdot p_{\Delta}(\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

Théorème 5.4 *Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ et pour tout réel α ,*

$$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}). \quad (5.11)$$

Démonstration Analogue à celle du théorème 5.3, et laissée au lecteur.

On déduit du théorème 5.3 les *identités remarquables* suivantes, analogues à celles qui existent dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Pour tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$,

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2, \quad \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \quad (5.12)$$

Démontrons par exemple la première. Par définition du carré scalaire et distributivité du produit scalaire sur l'addition des vecteurs (Théorème 5.3), on a d'abord

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2.$$

Puisque le produit scalaire est commutatif (Théorème 5.2), on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, donc

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2.$$

La formule $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ se démontre de même.

Exemple 5.1 A titre d'exemple, nous démontrons le résultat classique suivant en utilisant le produit scalaire : Soient A et B deux points distincts du plan, et soit (C) le cercle de diamètre $[AB]$. Alors, pour tout point $M \in (C)$, l'angle $\widehat{AMB}$ est un angle droit (Figure 5.8).

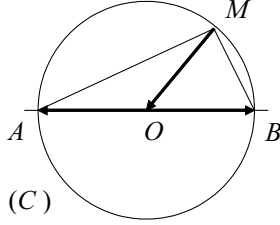


Figure 5.8

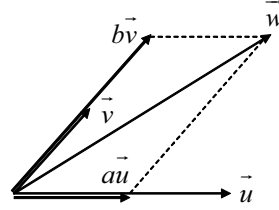


Figure 5.9

Pour cela, calculons le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ en faisant intervenir le centre O de (C) , qui est le milieu de $[AB]$. Il vient, puisque $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}).$$

On reconnaît l'identité remarquable $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$. En outre le carré scalaire est égal au carré de la norme [Formule (5.7)]. En désignant par R le rayon du cercle (C) , on a donc

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = \|\overrightarrow{MO}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 = R^2 - R^2 = 0.$$

Ainsi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. Par conséquent $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$.

Notons que, *réciroquement*, si le point M est tel que $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$, alors M est sur le cercle de diamètre $[AB]$. En effet, en désignant dans ce cas par O le milieu de $[AB]$, on a comme précédemment

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = \|\overrightarrow{MO}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2.$$

Comme par hypothèse $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$, on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, et donc $\|\overrightarrow{MO}\| = \|\overrightarrow{OA}\|$. Ainsi M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

5.4 Bases orthonormées du plan

5.4.1 Définition et exemples

On dit que deux vecteurs non nuls $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan forment une *base* $\mathcal{B}$ s'ils sont *non colinéaires* (Figure 5.9). Considérons alors un vecteur arbitraire $\vec{w}$, et construisons le parallélogramme dont les côtés sont portés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et dont la diagonale est $\vec{w}$.

Par la règle du parallélogramme, $\vec{w}$ s'exprime comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ (donc de la forme $a\vec{u}$, avec $a \in \mathbb{R}$) et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ (donc de la forme $b\vec{v}$, avec $b \in \mathbb{R}$).

Ainsi tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'exprime sous la forme d'une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Les nombres réels a et b sont les *composantes* de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. On écrira souvent aussi les composantes de $\vec{w}$ en colonne, de la façon suivante :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}). \quad (5.13)$$

Dans la plupart des applications, on utilisera des *bases orthonormées* :

Définition 5.2 On dit que la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est une *base orthonormée* si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, et s'ils sont normés, c'est-à-dire si $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.

Exemple 5.2 La base usuelle $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.

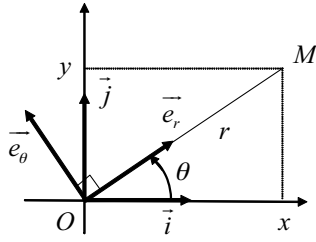


Figure 5.10

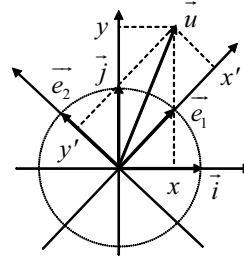


Figure 5.11

Un autre exemple est la base $\mathcal{B}_\theta = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée aux coordonnées polaires dans le plan (Figure 5.10). En utilisant le théorème des projections, on voit que celle-ci est définie par

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}, \\ \vec{e}_\theta &= \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}. \end{aligned}$$

5.4.2 Expression analytique du produit scalaire

L'intérêt d'une base orthonormée est qu'elle permet de trouver l'expression du produit scalaire de deux vecteurs dès lors qu'on connaît leurs composantes. On parle de l'*expression analytique* du produit scalaire :

Théorème 5.5 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée du plan, et soient

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

deux vecteurs du plan. Alors on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'. \quad (5.14)$$

Démonstration En utilisant les théorèmes 5.3 et 5.4, on obtient

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \cdot (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) = xx'\vec{e}_1^2 + xy'\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + yx'\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + yy'\vec{e}_2^2.$$

Or $\vec{e}_1^2 = \|\vec{e}_1\|^2 = 1$, $\vec{e}_2^2 = \|\vec{e}_2\|^2 = 1$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$ car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Ainsi on a bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Théorème 5.6 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée du plan. Soit le vecteur $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.15)$$

Démonstration $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ en vertu de (5.14).

5.4.3 Changement de base orthonormée

Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée, le parallélogramme de la figure 5.9 est un *rectangle* et le calcul des composantes d'un vecteur se ramène à un calcul de *projections orthogonales* sur les axes portés par $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$, comme le montre la figure 5.11. Le théorème des projections se traduit alors immédiatement par le

Théorème 5.7 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ une base orthonormée, et soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Alors

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{u} \cdot \vec{e}_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}. \quad (5.16)$$

Exemple 5.3 Dans la base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j})$, soit

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}; \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{i} + \vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

Alors $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée du plan. En effet, en utilisant l'expression analytique du produit scalaire et de la norme dans la base $\mathcal{B}_0$, on obtient

$$\|\vec{e}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1^2} = 1, \quad \|\vec{e}_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = 1, \quad \text{et} \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2} [1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1] = 0.$$

Soit maintenant $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ un vecteur quelconque du plan (Figure 5.11). Les composantes x' et y' de $\vec{u}$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ sont données par le théorème des projections (Formule (5.16)). Les produits scalaires figurant dans cette formule se calculent dans la base *orthonormée* $\mathcal{B}_0$ grâce au théorème 5.5 :

$$\begin{cases} x' = \vec{u} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + y) \\ y' = \vec{u} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + y) \end{cases} \quad (5.17)$$

Les formules (5.17), qui donnent les expressions de x' et y' en fonction de x et y , s'appellent les *formules de changement de base*. Elles seront généralisées à des bases quelconques dans le chapitre 37.

5.5 Bases orthonormées de l'espace

5.5.1 Définition

Trois vecteurs non nuls $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace forment une *base* $\mathcal{B}$ s'ils ne sont pas coplanaires (Figure 5.12).

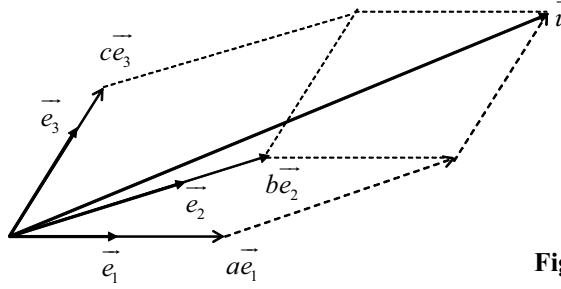


Figure 5.12

Considérons alors un vecteur arbitraire $\vec{u}$, et construisons le *prisme* dont les arêtes sont portées par $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, et dont la diagonale est $\vec{u}$. On voit que $\vec{u}$ s'exprime comme somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{e}_1$ (donc de la forme $a\vec{e}_1$, avec $a \in \mathbb{R}$), d'un vecteur colinéaire à $\vec{e}_2$ (donc de la forme $b\vec{e}_2$, avec $b \in \mathbb{R}$), et d'un vecteur colinéaire à $\vec{e}_3$ (donc de la forme $c\vec{e}_3$, avec $c \in \mathbb{R}$). Ainsi tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace s'exprime sous la forme d'une *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$:

$$\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

Les nombres réels a, b, c sont les *composantes* de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

La base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est dite *orthonormée* si les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ sont orthogonaux deux à deux et *normés*, c'est-à-dire si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1. \quad (5.19)$$

5.5.2 Coordonnées cylindriques et sphériques

L'exemple le plus simple de base orthonormée est la base usuelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace (Figures 5.13 et 5.14), associée aux coordonnées cartésiennes x, y, z . On utilise également deux autres bases orthonormées, liées aux coordonnées *cylindriques* et *sphériques* de l'espace.

Exemple 5.4 Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) du point M sont définies par la figure 5.13. On observe que r et θ sont tout simplement les coordonnées polaires, dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la projection orthogonale m de M , tandis que z est la troisième coordonnée des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , c'est-à-dire la cote de M . Ainsi les formules de passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes sont :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \quad (5.20)$$

On les appelle *coordonnées cylindriques* car, lorsque θ et z varient, avec $r = R$ fixé, le point M décrit la surface d'un *cylindre* d'axe Oz de rayon R .

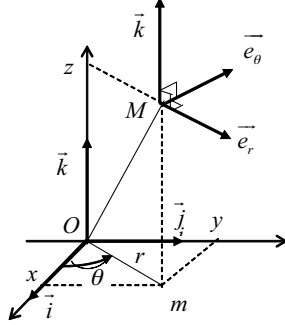


Figure 5.13

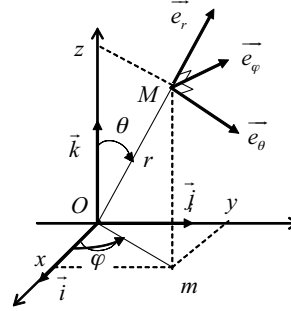


Figure 5.14

La base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ liée aux coordonnées cylindriques s'obtient en faisant varier les trois coordonnées r, θ, z indépendamment à partir de M . Lorsque r varie tout seul d'une petite quantité positive, on obtient le vecteur normé $\vec{e}_r$, qui est axial (sa direction passe par Oz) et horizontal. Lorsque θ varie tout seul d'une petite quantité positive, on obtient le vecteur normé $\vec{e}_\theta$, qui est horizontal et orthogonal à $\vec{Om}$. Lorsque z varie tout seul d'une petite quantité positive, on obtient le vecteur normé $\vec{k}$, qui est vertical. Voir la figure 5.13 ainsi que l'animation sur notre site Internet.

Exemple 5.5 Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) du point M sont définies par la figure 5.14. On notera que $r = \|\vec{OM}\|$.

Pour obtenir tous les points de l'espace, on fait varier r entre 0 et $+\infty$, φ entre 0 et 2π , et θ entre 0 et π . Si θ et φ varient indépendamment, avec $r = R$ fixe, le point M décrit la *sphère* de centre O de rayon R , d'où le nom de *coordonnées sphériques*. Voir l'animation sur notre site Internet.

Les formules de passage des coordonnées sphériques (r, θ, φ) aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) sont

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (5.21)$$

Elles résultent du théorème des projections (Exercice 5.8). Comme pour les coordonnées cylindriques, la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ liée aux coordonnées sphériques s'obtient en faisant varier r, θ, φ indépendamment à partir de M . Lorsque r varie tout seul d'une petite quantité positive, on obtient le vecteur normé $\vec{e}_r$, qui est radial (sa direction passe par O , origine du repère). Lorsque θ varie tout seul d'une petite quantité positive, on obtient le vecteur normé $\vec{e}_\theta$, qui est dans le plan défini par Oz et $\vec{OM}$, et orthogonal à $\vec{Om}$. Lorsque φ varie tout seul d'une petite quantité positive, on obtient le vecteur normé $\vec{e}_\varphi$, qui est horizontal et orthogonal à $\vec{Om}$.

5.5.3 Propriétés des bases orthonormées

Les théorèmes 5.5, 5.6, et 5.7 se généralisent immédiatement aux bases orthonormées de l'espace :

Théorème 5.8 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée, et soient

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

deux vecteurs de l'espace. Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'. \quad (5.22)$$

Théorème 5.9 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de l'espace. Soit le vecteur $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5.23)$$

Théorème 5.10 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de l'espace, et soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. Alors

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{u} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \vec{u} \cdot \vec{e}_1 \\ \vec{u} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{u} \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}. \quad (5.24)$$

Exercices

Les basiques

Exercice 5.1 (A,C) On considère les vecteurs $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{B} = \vec{j} + \vec{k}$ dans l'espace rapporté à la base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1) Faire un dessin représentant $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{A} + \vec{B}$.
- 2) Calculer $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$, $\|\vec{A} + \vec{B}\|$.
- 3) Calculer $\vec{A} \cdot \vec{B}$. En déduire l'angle θ que forment entre eux $\vec{A}$ et $\vec{B}$.
- 4) Déterminer les composantes du vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par $\vec{A} + \vec{B}$.
- 5) Déterminer les angles α, β, γ que fait $\vec{u}$ avec $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ respectivement. On donnera des valeurs approchées en radians et en degrés.

Exercice 5.2 (C,D) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient les vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ dont les composantes dans la base $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j})$ sont

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} \text{ et } \vec{e}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

- 1) Faire une figure.
- 2) Démontrer que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base orthonormée du plan.
- 3) Calculer les composantes du vecteur $\vec{j}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 5.3 (C,D) 1) Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dont les composantes dans la base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont

$$\vec{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}, \quad \vec{v} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}, \quad \vec{w} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

forment une base orthonormée $\mathcal{B}$ de l'espace.

2) Soit $M(x, y, z)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer les composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire les coordonnées (x', y', z') de M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 5.4 (A,B) 1) On donne quatre points A, B, C, D quelconques du plan. En introduisant $\overrightarrow{DA}$, démontrer que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

2) Soit ABC un triangle non rectangle du plan. On note H le point d'intersection des hauteurs AA' et CC' .

a) Faire une figure.

b) Calculer $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA}$ en utilisant le résultat de la question 1.

c) En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 5.5 (A,B) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs. Prouver l'*identité d'Apollonius* :

$$\|\vec{w} - \vec{u}\|^2 + \|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 + 2 \left\| \vec{w} - \frac{\vec{u} + \vec{v}}{2} \right\|^2.$$

Exercice 5.6 (D) Soient les vecteurs $\vec{P}$, $\vec{F}$ et $\vec{T}$ de la figure 5.15.

On suppose que $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$ et on connaît θ et $P = \|\vec{P}\|$.

Calculer $T = \|\vec{T}\|$ et $F = \|\vec{F}\|$ en projetant sur un axe vertical et sur un axe dirigé par $\vec{T}$.

Exercice 5.7 (D) On considère les quatre vecteurs $\vec{P}$, $\vec{F}$, $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ de la figure 5.16. On suppose que $\vec{P} + \vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$. Calculer $T_1 = \|\vec{T}_1\|$ et $T_2 = \|\vec{T}_2\|$ en fonction de α , β , $F = \|\vec{F}\|$ et $P = \|\vec{P}\|$.

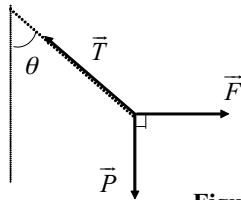


Figure 5.15

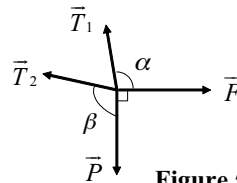


Figure 5.16

Exercice 5.8 (D) Démontrer les formules de passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes (Formules 5.21).

Les techniques

Exercice 5.9 Soit $ABCD$ un *tétraèdre régulier* de l'espace, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux (Figure 5.17).

On note $a = AB = AC = AD = BC = BD = CD$. Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D , c'est-à-dire le point de l'espace qui vérifie $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$.

- 1) Démontrer que $\vec{GA} = -\frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD})$, puis calculer GA en fonction de a .
- 2) En déduire que G est le centre de la sphère circonscrite à $ABCD$. Calculer le rayon R de cette sphère en fonction de a .
- 3) Calculer la valeur, en degrés, de l'angle $\widehat{AGB}$.

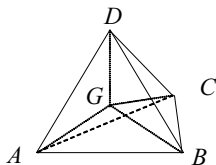


Figure 5.17

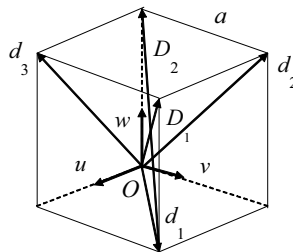


Figure 5.18

Exercice 5.10 Soit un cube d'arête a . Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs normés issus de O , et portés par les trois arêtes issues de O (Figure 5.18).

- 1) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ et $\vec{d}_3$ joignant l'origine aux extrémités des diagonales des faces du cube passant par O ("petites diagonales"). En déduire la longueur des petites diagonales du cube, et l'angle qu'elles font deux à deux.

- 2) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{D}_1$ et $\vec{D}_2$ joignant deux sommets opposés du cube dans le plan diagonal contenant le vecteur $\vec{w}$ ("grandes diagonales"). En déduire la longueur des grandes diagonales et l'angle qu'elles font entre elles.

- 3) Déterminer les angles que fait la grande diagonale issue de O avec les trois faces adjacentes du cube, c'est-à-dire les faces contenant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ respectivement.

Les exotiques et les olympiques

Exercice 5.11 Dans le plan, on considère deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$ et $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{3}$.

Déterminer l'expression analytique du produit scalaire dans la base $(\vec{a}, \vec{b})$.

Exercice 5.12 Soit $\vec{u}, \vec{v}$, et $\vec{w}$ trois vecteurs normés de l'espace (non nécessairement orthogonaux), tels que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base de l'espace. On note θ, φ et ψ les mesures respectives de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}, \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}, \widehat{(\vec{v}, \vec{w})}$, avec θ, φ et $\psi \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

- 1) Calculer $\Delta = \begin{vmatrix} \vec{u}^2 & \vec{u} \cdot \vec{v} & \vec{u} \cdot \vec{w} \\ \vec{v} \cdot \vec{u} & \vec{v}^2 & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot \vec{u} & \vec{w} \cdot \vec{v} & \vec{w}^2 \end{vmatrix}$ et prouver que $\Delta \neq 0$.

- 2) Déterminer le vecteur inconnu $\vec{x}$ qui vérifie $\vec{x} \cdot \vec{u} = a$ et $\vec{x} \cdot \vec{v} = b$ et $\vec{x} \cdot \vec{w} = c$, où a, b, c sont des réels donnés.