

**PSI**  
**Mathématiques · Informatique**  
**2022**

Sous la coordination de

William AUFORT  
professeur en CPGE  
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Lyon)

Florian METZGER  
professeur en CPGE  
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent PUYHAUBERT  
professeur en CPGE  
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile ANDREANI  
ENS Ulm

William AUFORT  
professeur en CPGE

Sélim CORNET  
professeur en CPGE

Julie GAUTHIER  
professeur agrégé

Hugo KOUBBI  
ENS Paris-Saclay

Thierry LIMOGES  
professeur en CPGE

Benjamin MONMEGE  
enseignant-chercheur à l'université

Vincent PUYHAUBERT  
professeur en CPGE

Cyril RAVAT  
professeur en CPGE

Bertrand WIEL  
professeur en CPGE



---

# Sommaire

---

		Énoncé	Corrigé
<b>E3A</b>			
Mathématiques 1	Endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ , équation différentielle et matrices orthotransposables. <i>polynômes, séries numériques, probabilités, réduction des endomorphismes, équations différentielles, intégration, séries entières</i>	17	22
<b>CONCOURS COMMUN INP</b>			
Mathématiques	Intégrales de Gauss et théorème de Moivre-Laplace, factorisation QR. <i>suites de fonctions, intégration, analyse réelle, probabilités, réduction des endomorphismes, espaces euclidiens</i>	43	51
Informatique	Assemblage et déformation de pièces automobiles. <i>programmation Python, tableaux, algèbre linéaire, graphes</i>	70	96
<b>CENTRALE-SUPÉLEC</b>			
Mathématiques 1	Matrices aléatoires à coefficients dans $\{-1, 1\}$ . <i>algèbre linéaire, probabilités, espaces euclidiens, réduction des endomorphismes</i>	112	117
Mathématiques 2	Étude d'un endomorphisme symétrique sur un espace $L^2$ . <i>intégration, séries entières, équations différentielles</i>	139	143
Informatique	Modélisations autour de la Formule 1. <i>Python, SQL, algèbre linéaire, équations différentielles</i>	165	173

### MINES-PONTS

Mathématiques 1	Étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier. <i>analyse réelle, séries entières, intégration</i>	189	195
Mathématiques 2	Matrices de Hurwitz. <i>réduction des endomorphismes, algèbre linéaire, polynômes, équations différentielles</i>	218	225
Informatique	Modélisation numérique d'un matériau magnétique. <i>programmation Python, SQL, algorithmes de listes, récursivité, piles, complexité</i>	245	258

### POLYTECHNIQUE-ENS

Mathématiques	Étude d'ensembles convexes en dimension finie. <i>espaces euclidiens, topologie, analyse réelle</i>	268	275
Informatique	Spéleo-logique. <i>algorithmique, complexité, listes, fonctions récursives, programmation Python</i>	310	320

### FORMULAIRES

Développements limités usuels en 0	341
Développements en série entière usuels	342
Dérivées usuelles	343
Primitives usuelles	344
Trigonométrie	346

SESSION 2022



PSI8M

---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI**

---

**MATHÉMATIQUES**

---

**Durée : 4 heures**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
  - Ne pas utiliser de correcteur.
  - Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.
- 

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

## EXERCICE 1

1. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+3)}.$$

2. Déterminer le nombre réel  $\alpha$  tel qu'il existe une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \alpha.$$

### 3. Espérance et variance de $X$

- 3.1. Après avoir justifié son existence, déterminer l'espérance  $\mathbb{E}(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .  
*On pourra utiliser l'égalité :  $2 = (n+3) - (n+1)$  afin d'introduire un télescopage.*
- 3.2. Déterminer  $\mathbb{E}(X(X+1))$ .
- 3.3. En déduire la variance  $\mathbb{V}(X)$  de la variable aléatoire  $X$ .

## EXERCICE 2

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ .

1. Soient  $q$  un réel et  $r$  un entier non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de  $\sum_{k=0}^r q^k$ .
2. Soit  $p$  un entier non nul.  
 Déterminer, dans  $\mathbb{R}[X]$ , le reste et le quotient de la division euclidienne de  $X^p - 1$  par  $X - 1$ .
3. Soit  $P \in E_n$ .  
 Montrer qu'il existe un unique polynôme  $Q$  de  $E_n$  tel que :

$$\forall x \neq 1, Q(x) = \frac{1}{x-1} \int_1^x P(t) dt.$$

On définit ainsi une application  $f : P \mapsto Q$ .

4. Prouver que  $f$  est un endomorphisme de  $E_n$ .
5. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $E_n$  et déterminer, pour tout  $Q$  de  $E_n$ , le polynôme  $f^{-1}(Q)$  à l'aide de  $Q$  et de ses dérivées.
6. Soit  $A$  la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $E_n$ .  
 Déterminer  $A$  et  $A^{-1}$ .
7. Déterminer les spectres des matrices  $A$  et  $A^{-1}$ .
8. Les matrices  $A$  et  $A^{-1}$  sont-elles diagonalisables ?
9. Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  une racine d'ordre de multiplicité  $k \in \mathbb{N}^*$  d'un polynôme  $Q$  de  $E_n$ .  
 À quelles conditions  $\alpha$  est-il racine de  $f^{-1}(Q)$  et avec quel ordre de multiplicité ?  
*On pourra étudier les cas  $\alpha = 1$  et  $\alpha \neq 1$ .*
10. Déterminer les sous-espaces propres de  $f^{-1}$ .
11. Montrer que les sous-espaces propres de  $f^{-1}$  sont aussi les sous-espaces propres de  $f$ .

## EXERCICE 3

## 1. Question de cours

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles et  $T$ -périodique.

Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(u) du = \int_0^T f(u) du$ .

\* \* \* \* \*

On se propose de déterminer des fonctions  $y$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant, pour tout réel  $x$ , la relation :

$$x y''(x) + y'(x) - 4 x y(x) = 0. \quad (**)$$

2. On suppose qu'il existe une fonction  $g$ , développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant (\*\*), sous la forme  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et telle que  $g(0) = a_0 = 1$ .

2.1. Prouver que  $a_1 = 0$  et déterminer pour tout  $n \geq 1$  une relation entre  $a_{n+1}$  et  $a_{n-1}$ .

2.2. Déterminer alors  $a_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

2.3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$  ainsi obtenue.

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x \cos(t)) dt.$$

3. Quelques propriétés de la fonction  $F$ 

3.1. Étudier la parité de la fonction  $F$ .

*On pourra utiliser le changement de variable  $u = \pi - t$  et la question de cours.*

3.2. Pour tout couple  $(x, t)$  de  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ , on pose  $h(x, t) = \exp(2x \cos(t))$ .

3.2.1. Justifier que  $h$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ .

3.2.2. Prouver que pour  $k$  non nul, la fonction  $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$  existe et est continue sur  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ .

3.2.3. Soit  $I$  un segment de  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour tout entier  $k$  non nul, il existe un réel positif  $M_k$  tel que :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi], 0 \leq \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq M_k.$$

3.2.4. En déduire que  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

3.2.5. Donner pour tout  $x$  réel et tout  $k \in \mathbb{N}^*$  une expression de  $F^{(k)}(x)$  sous la forme d'une intégrale.

3.3. Démontrer que  $F$  vérifie la relation (\*\*).

#### 4. Développement en série entière de $F$

- 4.1. Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.
- 4.2. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

où  $I_n$  s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale  $J_n = \int_0^{2\pi} \cos^n(t) dt$ .

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

- 4.3. Calculer  $J_0$  et  $J_1$ .
- 4.4. Soit  $n \geq 2$ . Déterminer une relation de récurrence entre  $J_n$  et  $J_{n-2}$ .
- 4.5. En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , une expression de  $J_n$  en fonction de  $n$ .
- 4.6. Comparer alors les fonctions  $F$  et  $g$ .

### EXERCICE 4

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , à coefficients réels.

$O_n$  et  $I_n$  sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note enfin  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### 1. Question de cours

Démontrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est stable pour la transposition et pour la multiplication matricielle.

\* \* \* \* \*

#### Partie 1

2. Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda$  un réel.

On considère les matrices par blocs de taille  $2n$  :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda I_n & -B \\ -A & I_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

- 2.1. Calculer  $UV$  et  $VU$ .
- 2.2. Démontrer que  $AB$  et  $BA$  ont le même polynôme caractéristique.
3. Justifier que pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , la matrice  $M^T M$  est diagonalisable dans une base orthonormale de  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique.
4. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale  $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $M^T M = R^T M M^T R$ .

## e3a Mathématiques PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et Florian Metzger (professeur en CPGE).

---

Ce sujet est composé de quatre exercices indépendants de longueurs croissantes.

- L'exercice 1 étudie une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ , ce qui sert de prétexte pour réaliser des calculs de sommes de séries à termes positifs.
- Le deuxième exercice s'intéresse à la réduction d'un automorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . Il faut savoir jongler avec la division euclidienne de polynômes et les sous-espaces propres d'endomorphismes.
- L'exercice 3 propose la résolution d'une équation différentielle du second ordre sur  $\mathbb{R}$  :

$$xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0$$

Deux méthodes sont utilisées. La première utilise les séries entières, la seconde une fonction définie par une intégrale à paramètre. Les théorèmes de dérivation et d'intégration de ce type d'intégrale sont utilisés afin de montrer que les deux méthodes définissent la même solution de l'équation différentielle.

- Dans l'exercice 4, on étudie les matrices orthogonales qui permettent de définir la notion de matrice *orthotransposable*, c'est-à-dire une matrice carrée  $M$  telle qu'il existe une matrice orthogonale  $Q$  vérifiant

$$Q^T M Q = M^T$$

Le cas des matrices de taille 2 est d'abord étudié, avant d'aborder les matrices de taille impaire.

Ce sujet est long mais relativement complet et de difficulté standard pour le concours e3a. C'est donc un sujet de choix à traiter au fur et à mesure de l'étude des chapitres de PSI (mais aussi des autres filières). L'exercice 1 peut même être fait dès la première année, une fois vu le chapitre sur les séries numériques.

## INDICATIONS

### Exercice 1

- I.2 Vérifier la convergence des séries manipulées en comparant leur terme général à des séries de Riemann. Choisir  $\alpha$  pour que la somme égale 1. Utiliser la formule démontrée à la question I.1 pour faire apparaître un télescopage.
- I.3.2 Utiliser l'égalité  $1 = (n+3) - (n+2)$  en vue d'un télescopage puis raisonner à l'aide des sommes partielles de la série définissant  $E(X(X+1))$ , dont on aura montré préalablement qu'elle converge.
- I.3.3 Utiliser la formule donnant  $V(X)$  en fonction de  $E(X^2)$  et  $E(X)$ , puis faire intervenir  $E(X(X+1))$  pour conclure à l'aide des questions I.3.1 et I.3.2.

### Exercice 2

- II.2 Utiliser le résultat de la question II.1 puis conclure à l'égalité de deux polynômes qui coïncident en une infinité de valeurs.
- II.3 Introduire les coefficients du polynôme  $P$  puis utiliser la linéarité de l'intégrale, ainsi que le résultat de la question II.2.
- II.4 Pour montrer la linéarité, utiliser à nouveau le théorème énonçant que deux polynômes coïncidant en une infinité de valeurs sont égaux.
- II.5 Montrer que  $f$  est injective en dérivant l'équation de la question II.3.
- II.6 Utiliser la formule de la question II.3 pour  $A$  et celle de la question II.5 pour  $A^{-1}$ .
- II.7 Remarquer que  $A$  et  $A^{-1}$  sont des matrices triangulaires.
- II.9 Introduire le reste dans la division euclidienne de  $Q$  par  $(X-\alpha)^k$  puis utiliser la formule trouvée à la question II.5.
- II.10 Trouver un vecteur propre de chaque sous-espace propre en utilisant le résultat de la question II.7 et la formule de la question II.5.

### Exercice 3

- III.2.1 Dériver la série entière terme à terme.
- III.2.3 Appliquer la règle de d'Alembert.
- III.3.2.2 Exprimer la dérivée partielle  $\frac{\partial h}{\partial x}$  en fonction de  $h$  puis conclure par récurrence immédiate en utilisant la question III.3.2.1.
- III.3.2.3 La question III.3.2.2 permet d'explicitier  $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ . En notant  $I = [a; b]$ , borner la quantité  $2x \cos t$  en fonction de  $\max(|a|, |b|)$ .
- III.3.2.4 Appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre sur tout segment de  $\mathbb{R}$ , en utilisant les questions III.3.2.1 et III.3.2.2.
- III.3.3 Utiliser la formule de la question III.3.2.5 et la linéarité de l'intégrale, puis le fait que  $\cos^2 = 1 - \sin^2$  afin de faire apparaître une intégration par parties.
- III.4.2 Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série.
- III.4.4 Appliquer une intégration par parties en utilisant à nouveau  $\cos^2 = 1 - \sin^2$ .
- III.4.5 Appliquer le résultat des questions III.4.3 et III.4.4.
- III.4.6 Conclure que  $F = g$  en utilisant les questions III.2.2, III.4.2 et III.4.5.

**Exercice 4**

- IV.2.2 Calculer les déterminants de  $UV$  et  $VU$  qui sont des matrices triangulaires par blocs. Conclure à l'égalité des polynômes caractéristiques en notant que l'égalité obtenue est vraie pour une infinité de valeurs  $\lambda$ .
- IV.3 Utiliser le théorème spectral.
- IV.4 Utiliser le résultat des questions IV.3 puis IV.2.2, pour en déduire que les dimensions des sous-espaces propres de  $MM^T$  et  $M^T M$  sont identiques. Cela assure que la diagonalisation de ces deux matrices permet d'obtenir la même matrice diagonale.
- IV.7 Utiliser le rappel de l'énoncé et le théorème spectral, puis le résultat de la question IV.6.
- IV.8.2 Au moins l'une des matrices exhibées à la question IV.8.1 doit fonctionner.
- IV.8.3 En plus de la question IV.7 et de la question IV.8.2, on utilisera le rappel de cours de la question IV.1.
- IV.9.1 Commencer par transposer l'égalité  $Q^T M Q = M^T$ .
- IV.9.2 Utiliser le résultat de la question IV.9.1 et la multilinéarité du déterminant.

## EXERCICE 1

**I.1** Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Pour tout entier naturel  $n$  non nul, en mettant les deux fractions au même dénominateur, on obtient

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+3} = \frac{a \times (n+3) + b \times n}{n(n+3)} = \frac{(a+b) \times n + 3a}{n(n+3)}$$

En choisissant  $a = 1$ , puis  $b = -1$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+3}$$

**I.2** Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$p_n = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \alpha$$

La série  $\sum_{n \geq 1} p_n$  converge, puisque

$$\frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \alpha = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

et  $1/n^4$  est le terme général d'une série de Riemann (absolument) convergente, car  $4 > 1$ . Déterminons  $\alpha$  tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$$

En notant pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$a_n = \frac{\alpha}{n(n+1)(n+2)}$$

on obtient à l'aide du résultat de la question I.1

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad p_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{-1}{n+3}\right) \times \frac{\alpha}{(n+1)(n+2)} = a_n - a_{n+1}$$

d'où

$$1 = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$$

Or  $(a_n)_{n > 0}$  est une suite tendant vers 0, donc, par télescopage

$$1 = a_1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_1 = \frac{\alpha}{6}$$

Fixons  $\alpha = 6$ . On a alors  $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ . Posons  $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $X$  la variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  telle que

$$\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) = \omega$$

D'après le théorème d'existence d'une loi d'une variable aléatoire, il existe  $P$  une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad P(X = n) = p_n = \frac{18}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Il existe  $P$  une probabilité sur  $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\}))$  et  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad P(X = n) = \frac{18}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

## CCINP Maths PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

---

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.  
Le premier traite d'analyse et de probabilités.

- La première partie détermine un équivalent d'une suite d'intégrales sur un segment. C'est une étude très classique qui rappelle celle des intégrales de Wallis. Elle n'utilise que des méthodes de première année.
- On s'intéresse ensuite à la convergence simple d'une suite de fonctions afin de calculer la valeur de l'intégrale de Gauss à l'aide du théorème de convergence dominée.
- La troisième partie est la plus originale : elle établit à partir de techniques élémentaires d'analyse (étude de fonction, sommation, encadrement) une majoration non triviale d'une suite double.
- Enfin, on exploite les résultats précédents pour démontrer la convergence simple d'une famille de fonctions en escalier définies par des variables aléatoires binomiales vers une fonction gaussienne.

Le second problème est consacré à l'algèbre linéaire.

- La première partie permet de retrouver certaines propriétés élémentaires des matrices de rang 1. Elle utilise presque exclusivement des techniques de calcul matriciel.
- La deuxième traite des matrices de Householder, c'est-à-dire celles de symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan dans un espace euclidien. Après l'étude d'un exemple, l'expression générale de ces matrices est établie. Cette partie fait largement appel au chapitre du cours de première année consacré aux espaces euclidiens.
- La dernière partie donne une application de ces matrices dans le cadre de la factorisation QR, c'est-à-dire l'écriture d'une matrice quelconque comme produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire supérieure.

Hormis quelques questions concernant la réduction dans le second problème et la convergence de suites de fonctions dans le premier, ce sujet fait très peu appel au programme de seconde année. Grâce à des parties indépendantes et aux nombreux thèmes qu'il parcourt, à l'alternance de questions calculatoires et d'autres proches du cours, il permettait d'avancer sans être bloqué. Ce sujet vous entraînera à calculer rapidement et à choisir, parmi des questions sans doute trop nombreuses, celles sur lesquelles vous serez le plus à l'aise et efficace. Vous constaterez que les questions les plus délicates ne se trouvent pas toujours en fin d'énoncé, et qu'elles peuvent être très proches du cours.

## INDICATIONS

### Problème 1

- 2 Intégrer  $I_{m+2}$  par parties et faire apparaître  $I_m$ .
- 3 Utiliser un changement de variable trigonométrique pour calculer  $I_1$  puis démontrer les deux résultats simultanément par récurrence.
- 6 Poser le changement de variable  $u = t\sqrt{n}$ .
- 7 Écrire  $u_n(t)$  sous forme exponentielle et utiliser un développement limité en zéro de  $\ln(1+x)$ .
- 8 Appliquer le premier résultat à démontrer au réel  $x = -t^2/n$ .
- 9 Utiliser le théorème de convergence dominée et le résultat de la question 6.
- 10 Trouver une fonction facilement intégrable qui majore la dérivée de la fonction  $g$ .
- 12 Écrire la majoration de la question 10 en  $i/n$  pour tout  $i \in \llbracket 1; k-n-1 \rrbracket$ .
- 15 Étudier la croissance de la suite strictement positive  $(h_n(t_k, n))_{0 \leq k \leq 2n}$  en formant le rapport entre deux termes consécutifs.
- 16 Encadrer le terme  $k_n - n$  à l'aide de  $\sqrt{n}$  et  $x$  puis obtenir un équivalent par encadrement.
- 17 Obtenir la limite en 0 à l'aide du résultat de la question 5 puis trouver une expression de  $h_n(x)$  pour tout  $x$  non nul en fonction de  $a_{n,n}$ ,  $k_n$  et du réel  $b_{k_n, n}$  défini à la question 12. Passer alors à la limite à l'aide des équivalents calculés à la question 16.

### Problème 2

- 18 Choisir  $X$  parmi les colonnes non nulles de  $A$ .
- 20 Observer que  $YX^\top$  est une matrice de taille 1 dont l'unique coefficient est égal à la trace de  $X^\top Y$ .
- 23 Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la question 20.
- 26 Calculer les produits scalaires des couples de vecteurs propres ou se servir du théorème spectral.
- 27 Exécuter l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormale adaptée à la décomposition et obtenir  $P$  comme matrice de passage de la base canonique à cette base.
- 29 Justifier l'expression du noyau en procédant par équivalences puis raisonner par inclusion et égalité des dimensions afin de déterminer  $\text{Im } P_V$ .
- 32 Identifier le sous-espace  $\text{Ker } (Q_V - I_n)$  par rapport auquel la symétrie orthogonale s'effectue.
- 33 Procéder par équivalence en développant  $\|X - U\|^2$  et  $\|X - V\|^2$  à l'aide de la bilinéarité du produit scalaire.
- 34 Utiliser la question précédente ou l'expression de  $P_{U-V}$  donnée dans l'énoncé, observer alors que  $\|U - V\|^2 = 2\langle U - V, Y \rangle$
- 36 Traiter séparément le cas où  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  sont orthogonales. Normaliser les colonnes  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  et appliquer le résultat des questions 36 et 32.
- 37 Appliquer le résultat de la question 36 où  $\tilde{U}$  est une colonne bien choisie de la matrice  $A$ .

### Problème 1. INTÉGRALES DE GAUSS ET THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE

**1** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $t \in [0; 1]$ , on a l'encadrement  $0 \leq \sqrt{1-t^2} \leq 1$  donc

$$(1-t^2)^{\frac{m+1}{2}} = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \sqrt{1-t^2} \leq (1-t^2)^{\frac{m}{2}}$$

d'où par croissance de l'intégrale

$$I_{m+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m+1}{2}} dt \leq \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt = I_m$$

ce qui prouve que

La suite  $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

**2** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Développons

$$\begin{aligned} I_{m+2} &= \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} (1-t^2) dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt \end{aligned}$$

puis intégrons par parties en posant  $u(t) = t$  et  $v(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}$ , les fonctions  $u$  et  $v$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$ :

$$\begin{aligned} I_{m+2} &= I_m + \frac{1}{m+2} \int_0^1 \underbrace{t(-2t) \left(\frac{m}{2} + 1\right)}_{v'(t)} (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt \\ &= I_m + \frac{1}{m+2} \left( [t(1-t^2)^{\frac{m}{2}+1}]_0^1 - \int_0^1 1 \times (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} dt \right) \end{aligned}$$

d'où  $I_{m+2} = I_m - \frac{I_{m+2}}{m+2}$

On en déduit que  $I_m = \left(1 + \frac{1}{m+2}\right) I_{m+2} = \frac{m+3}{m+2} I_{m+2}$

Par conséquent,

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m$$

**3** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons

$$\mathcal{P}(n) : I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \quad \text{et} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}$$

et montrons par récurrence que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- $\mathcal{P}(1)$ : calculons

$$a_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{2^3} \binom{2}{1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Par ailleurs  $I_2 = \int_0^1 (1-t^2) dt = \left[ t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$

et, en posant le changement de variable  $t = \sin u$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \quad (\text{car } \cos \text{ est positive sur } [0; \pi/2]) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos(2u)) du
 \end{aligned}$$

d'où 
$$I_1 = \left[ \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Vérifions alors que

$$\frac{\sqrt{2}}{2 \times 3a_{1,1}} = \frac{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3} = I_2$$

et 
$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} a_{1,1} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} = I_1$$

donc  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$  : soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculons dans un premier temps le rapport

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} &= \frac{\sqrt{2n+2} \binom{2n+2}{n+1}}{2^{2n+3}} \times \frac{2^{2n+1}}{\sqrt{2n} \binom{2n}{n}} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} \\
 \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} &= \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}
 \end{aligned}$$

Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, et utilisons le résultat de la question 2 et le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
 I_{2(n+1)} &= \frac{2n+2}{2n+3} I_{2n} \\
 &= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)} \times \frac{1}{a_{n,n}} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\
 &= \frac{2(n+1)}{2n+3} \times \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)} \times \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}a_{n+1,n+1}} \\
 &= \frac{(n+1)\sqrt{2}}{(2n+3)2\sqrt{n+1}a_{n+1,n+1}} \\
 I_{2(n+1)} &= \frac{\sqrt{2(n+1)}}{2(2n+3)a_{n+1,n+1}}
 \end{aligned}$$

## CCINP Informatique PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et William Aufort (professeur en CPGE).

---

Ce sujet étudie l'assemblage et la déformation de pièces automobiles. Il permet d'aborder différents problèmes numériques et algorithmiques. Ses parties sont relativement indépendantes.

- Dans la partie I, on étudie le posage d'une pièce bidimensionnelle non déformable sur une autre pièce non déformable. À l'aide d'une discrétisation et d'un raisonnement géométrique à base de droites coïncidentes, on énumère tous les posages possibles afin de calculer l'optimal, c'est-à-dire celui qui minimise le maximum des distances entre les points en vis-à-vis dans les deux pièces.
- Dans la deuxième partie, une pièce bidimensionnelle est découpée en surfaces élémentaires pour permettre son traitement numérique ultérieur. Cette étape de maillage consiste à discrétiser la pièce puis à trianguler l'ensemble des points ainsi obtenus. Pour des questions de stabilité numérique, on cherche une triangulation particulière respectant les contraintes de Delaunay. Un algorithme itératif, à base de basculements successifs, est étudié et implémenté.
- La troisième partie suppose le maillage calculé et propose de déterminer la matrice de rigidité d'une pièce. Pour simplifier, on considère uniquement une pièce unidimensionnelle où deux nœuds du maillage sont reliés par une barre. On emploie la méthode de résolution par éléments finis afin de résoudre l'équation différentielle obtenue par la théorie de la résistance des matériaux. Au cours de cette partie, la méthode de résolution d'un système linéaire par l'algorithme du pivot de Gauss est implémentée partiellement.
- La quatrième partie, bien plus courte mais délicate à comprendre, s'intéresse à l'analyse et à la comparaison des résultats obtenus dans le cas du posage d'une portière sur la caisse d'un véhicule. La qualité du posage et la finesse du maillage sont analysées qualitativement via des figures et des données quantitatives.

Ce sujet requiert la maîtrise de Python pour écrire des fonctions classiques et d'autres plus originales. Il enchaîne des questions d'analyse de code, d'écriture de code et d'interprétation de résultats. La partie sur la résolution d'un système linéaire permet de réviser un sujet fort classique en mathématiques et informatique, en discutant au passage sa stabilité numérique. Le sujet abordé est intéressant, même si les questions posées considèrent ensuite des cas très particuliers, bien éloignés de la motivation initiale.

## INDICATIONS

### Partie I

- 3 L'un des posages ne génère pas de collision et l'autre en génère deux.
- 5 Utiliser la fonction `droite` pour calculer les équations des droites coïncidentes dans le référentiel de la pièce du bas et de la pièce du haut. Parcourir ensuite les points de posage en vis-à-vis pour calculer les distances algébriques des deux points à la droite, puis la différence de ces distances, en maintenant la distance algébrique minimale et maximale dans deux variables.
- 6 Appliquer la fonction `posage` à chaque couple d'indices de points  $(n, p)$  avec  $n < p$ , en maintenant le couple qui génère la distance algébrique maximale la plus grande parmi les couples dont la distance algébrique minimale est positive ou nulle. En termes de complexité, remarquer qu'un nombre linéaire (en le nombre de points) de comparaisons est effectué pour chaque couple de points dans la fonction `posage`.

### Partie II

- 7 Un seul basculement est nécessaire.
- 8 Remplacer le triangle par l'un des trois nouveaux triangles et ajouter les deux autres à la fin de la liste à l'aide de la méthode `append`.
- 9 Analyser quelle doit être la longueur de la liste `Lflip` et procéder par élimination pour voir que deux propositions ne conviennent pas.
- 10 Écrire une fonction auxiliaire `test` prenant les coordonnées de quatre points  $A, B, C, M$  et renvoyant un booléen qui est `True` si et seulement si le produit vectoriel  $\vec{AB} \wedge \vec{AM}$  est du même signe que le produit vectoriel  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .
- 11 Pour compléter la fonction, utiliser la fonction `flip` et deux appels récursifs à la fonction `checkedge`.
- 12 Ne vous souciez pas trop de la façon de rendre visible les tableaux `T` et `noeud` dans toutes les fonctions écrites jusque-là. Le corrigé vous expliquera comment faire, même si c'est hors programme. Pour le reste, il suffit de suivre le déroulé de l'algorithme décrit dans l'énoncé.

### Partie III

- 13 Utiliser les opérations vectorielles permises par la bibliothèque `numpy`.
- 15 Il faut distinguer le cas où  $i = j \in \llbracket 1 ; n - 1 \rrbracket$  des autres cas.
- 19 Pour implémenter la recherche du pivot, on suppose que les  $k - 1$  premières lignes du système sont déjà triangulaires (et donc pas à considérer). On peut utiliser la fonction `abs`.
- 20 Il s'agit d'annuler les coefficients de la colonne  $i$  qui sont strictement en dessous de la diagonale.
- 21 Pour chaque ligne  $i$ , de la dernière à la première, soustraire de la dernière colonne de `Syst` une combinaison linéaire des coordonnées  $i + 1$  à `nb` de la solution en cours de construction.
- 22 En plus du vecteur `U`, la fonction `uEF` à écrire doit également prendre en argument la valeur de  $x$ .

**Partie IV**

- 23 Question bien difficile à comprendre vu le peu d'informations fournies par la légende de la figure 12...
- 24 Ne considérer que la figure 13 puisque les données du tableau 1 semblent en contradiction avec. Il s'agit de déduire un nombre minimal de nœuds tel que le déplacement maximal n'évolue plus d'une amplitude supérieure à 1 mm.
- 25 Calculer la dimension moyenne des triangles pour 5000 nœuds, la comparer à certaines dimensions typiques de la portière.

## I. POSAGE DES PIÈCES

1 Par lecture graphique, on obtient directement

$$P2 = [3., 3., 2., 2.]$$

On a suivi la préférence de l'énoncé d'entrer des coordonnées flottantes, même si cela ne changerait rien si les coordonnées entrées ici étaient entières. En effet, les opérations suivantes (en particulier de division) transformeraient les entiers en flottants lorsque ce serait nécessaire.

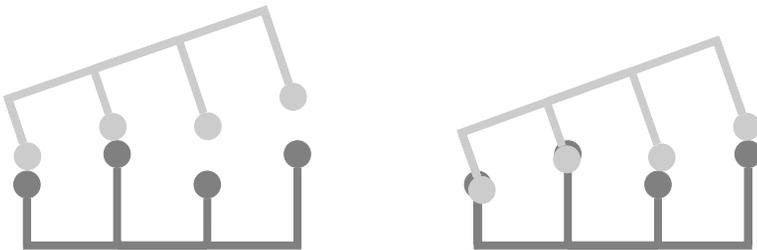
2 Après initialisation d'une liste vide `Lr` (pour « liste retournée »), on la remplit de gauche à droite à l'aide d'une boucle utilisant la méthode `append` :

```
def retourne(Ls):
    n = len(Ls)
    Lr = []
    for i in range(n):
        Lr.append(-Ls[n-1-i])
    return Lr
```

On peut aussi utiliser une définition de la liste à retourner par compréhension pour éviter l'initialisation suivie de la boucle :

```
def retourne(Ls):
    n = len(Ls)
    return [-Ls[n-1-i] for i in range(n)]
```

3 Voici les représentations des deux pièces associées au posage aux points 0 et 1 à gauche, et au posage aux points 2 et 3 à droite :



Le posage aux points 0 et 1 ne génère pas de collision, alors que le posage aux points 2 et 3 génère deux collisions.

4 Il suffit de traduire en Python les formules rappelées par l'énoncé :

```
def droite(Ls, n, p):
    zn, zp = Ls[n], Ls[p]
    a = (zn - zp) / ((n - p) * Delta_x)
    b = zn - n * (zn - zp) / (n - p)
    return [a, b]
```

5 Après avoir calculé les équations des deux droites coïncidentes dans le référentiel lié à chacune des pièces, à l'aide de la fonction de la question 4, on parcourt l'ensemble des points des pièces et réalise les opérations suivantes pour chacun.

## Centrale Maths 1 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean-Paul Bonnet (professeur en CPGE) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

---

Ce sujet est centré sur la notion de matrice aléatoire, c'est-à-dire de variable aléatoire dont les valeurs sont des matrices, dans le cas particulier où celles-ci sont à coefficients dans  $\{-1, 1\}$ . On y présente plusieurs manières de générer de telles matrices aléatoires et on calcule la probabilité que celles-ci satisfassent certaines propriétés.

- La partie I permet d'établir certains résultats généraux et classiques d'algèbre linéaire. On y introduit la définition d'une matrice nilpotente puis on donne des conditions de nilpotence et on démontre quelques propriétés de ces matrices.
- Ensuite, on s'intéresse aux matrices aléatoires dont tous les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $\{-1, 1\}$ . Le principal résultat de cette partie fournit un minorant de la probabilité qu'une telle matrice soit inversible.
- La partie III est exclusivement constituée de questions d'informatique. On y construit un programme en langage Python permettant de générer des matrices aléatoires à coefficients dans  $\{-1, 1\}$ .
- Enfin, on met en œuvre un raisonnement probabiliste pour établir un résultat de nature euclidienne, à savoir l'existence sous certaines conditions d'une famille de vecteurs « presque orthogonale » (pour laquelle les produits scalaires de vecteurs distincts sont tous inférieurs en valeur absolue à un paramètre  $\varepsilon$  fixé).

Ce sujet mêle habilement les trois grands thèmes du programme que sont l'algèbre, les probabilités et l'analyse. Comme la majorité des questions relèvent du programme de première année, ce problème est idéal pour réviser les fondamentaux. La difficulté augmente grosso modo au sein de chaque sous-partie ; certaines questions difficiles surgissent dès la deuxième partie, mais sont suivies de questions plus faciles. Ce sujet est donc un bon entraînement pour apprendre à gérer son temps, ne pas rester bloqué trop longtemps, et accepter, parfois, d'admettre certaines réponses pour avancer.

## INDICATIONS

### Partie I

- 3 Appliquer la question précédente.
- 4 Remarquer que si  $\lambda \in \mathbb{C}$  est valeur propre de  $A$ , alors  $\lambda^k$  est valeur propre de  $A^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .
- 5 Exprimer trace et déterminant en fonction des valeurs propres.
- 7 Appliquer la formule du binôme de Newton pour montrer que  $M+N$  est nilpotente.
- 8 Utiliser les questions 1, 5 et 6.
- 9 Appliquer le théorème de Cayley-Hamilton (ou trigonaliser  $M$ ).
- 10 Utiliser la question 4 et le théorème spectral.
- 11 Prouver que  $A^\top A$  est nilpotente et symétrique.
- 12 Chercher une matrice diagonale qui convient.

### Partie II

- 14 Remarquer que  $j$  est le plus grand entier  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$  tel que la famille  $(C_1, \dots, C_k)$  soit libre.
- 15 Extraire une famille libre maximale de la famille des lignes de la matrice dont les colonnes sont  $(U_1, \dots, U_d)$ .
- 16 En s'aidant de la question précédente, construire une bijection entre  $\mathcal{W} \cap \mathcal{V}_{n,1}$  et un ensemble de cardinal inférieur ou égal à  $2^d$ .
- 20 Exprimer  $\tau_n$  à partir des variables aléatoires  $m_{i,j}$ , puis faire appel aux propriétés de l'espérance et de la variance pour une somme de variables aléatoires.
- 21 Développer selon une ligne ou une colonne et appliquer le lemme des coalitions.
- 22 Suivre l'indication de l'énoncé et faire appel à la formule de König-Huygens ainsi qu'au lemme des coalitions.
- 23 Utiliser la question 9.
- 24 Calculer la probabilité que  $M_2$  ne soit pas inversible, à l'aide du déterminant.
- 25 Utiliser l'indépendance des variables aléatoires considérées.
- 26 Une famille de deux vecteurs est liée si, et seulement si, les deux vecteurs sont colinéaires.
- 27 Faire appel aux résultats des deux questions précédentes.
- 28 C'est le moment de se rappeler du résultat de la question 14.
- 29 Exprimer l'événement  $\{M_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$  à l'aide des  $R_j$ . On remarquera que l'énoncé contient une coquille : la matrice  $M$  est en fait la matrice  $M_n$ .
- 30 Penser à la formule des probabilités totales.
- 31 Majorer tous les termes de la somme obtenue à la question précédente. On pourra pour ce faire introduire  $\mathcal{W} = \text{Vect}(v_1, \dots, v_j)$  et lui appliquer le résultat de la question 16.
- 32 Combiner le résultat précédent et celui de la question 29. Reconnaître alors une somme géométrique.

**Partie III**

- 34 Le nombre d'itérations nécessaires étant inconnu, la boucle `while` est toute indiquée.
- 35 Effectuer des appels répétés à `nb_tours` et calculer la somme de tous les résultats obtenus. Diviser alors par `nbe` pour obtenir la moyenne.

**Partie IV**

- 36 Montrer que l'ensemble est majoré grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- 37 Remarquer que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est orthogonale.
- 38 Étudier sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $t \mapsto \operatorname{ch}(t) \exp(-t^2/2)$ .
- 39 Constater que le produit scalaire  $\langle X | Y \rangle$  fait intervenir les variables aléatoires  $X_i Y_i$  dont la question 19 nous donne la loi.
- 41 Appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire  $\exp(tZ)$ .
- 42 Vérifier que le résultat de la question précédente vaut aussi pour la variable aléatoire  $-Z$ , puis l'appliquer pour une valeur de  $t$  bien choisie.
- 43 Appliquer le résultat précédent à  $Z = \langle X | Y \rangle$ , pour des valeurs de  $\sigma$  et  $\lambda$  adaptées.
- 44 Penser à la sous-additivité de la probabilité.
- 46 Passer au complémentaire et remarquer qu'un événement de probabilité non nulle est non vide.

## I. PARTIE I

Les deux premières questions sont des questions de cours. Elles doivent être traitées de façon irréfutable.

**1** Remarquons d'abord que pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{Tr}(A) \in \mathbb{R}$ . Soient maintenant  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On calcule

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda A + B) &= \sum_{i=1}^n (\lambda A + B)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda A_{ii} + B_{ii}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n A_{ii} + \sum_{i=1}^n B_{ii} \\ \text{Tr}(\lambda A + B) &= \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \end{aligned}$$

On conclut que

L'application Trace est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

En outre, pour  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} \right)$$

La permutation des deux sommes (finies) est possible du fait que leurs indices sont indépendants. De plus, le produit dans  $\mathbb{R}$  est commutatif. Ainsi,

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n B_{ki} A_{ik} \right) = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \text{Tr}(BA)$$

On a ainsi montré que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

**2** Rappelons qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Notons  $\varphi$  l'application introduite dans l'énoncé par

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B)$$

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Étant donné que la trace est invariante par transposition,

$$\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^\top B) = \text{Tr}\left(\left(A^\top B\right)^\top\right) = \text{Tr}(B^\top A) = \varphi(B, A)$$

L'application  $\varphi$  est par conséquent symétrique.

Démontrer en premier la symétrie permet de simplifier la preuve de la bilinéarité, puisqu'il suffit alors de prouver la linéarité à droite ou à gauche.

Soient maintenant  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a, par linéarité de la trace,

$$\begin{aligned} \varphi(A, \lambda B + C) &= \text{Tr}(A^\top (\lambda B + C)) \\ &= \lambda \text{Tr}(A^\top B) + \text{Tr}(A^\top C) \\ \varphi(A, \lambda B + C) &= \lambda \varphi(A, B) + \varphi(A, C) \end{aligned}$$

ce qui prouve que  $\varphi$  est linéaire à droite. Comme elle est symétrique, on en déduit la linéarité à gauche, c'est donc une forme bilinéaire.

## Centrale Maths 2 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

—————

Un grand nombre de sujets de concours, écrits comme oraux, ont pour objet d'étude des produits scalaires de la forme

$$(f, g) \longmapsto \int_I f(t)g(t)w(t) dt$$

définis sur des espaces de fonctions du type

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \quad / \quad \int_I f(t)^2 w(t) dt \text{ converge} \right\}$$

Dans cet énoncé, on s'intéresse au cas où  $I = \mathbb{R}_+^*$  et  $w$  est l'application  $t \longmapsto e^{-t}/t$ .

- La partie I débute par des questions élémentaires où il faut vérifier l'appartenance à  $E$  de quelques fonctions, en particulier une application  $k_x$  que l'on retrouvera dans les autres parties. On établit ensuite une condition suffisante d'appartenance à  $E$  par l'intermédiaire d'une majoration qui, là encore, servira souvent par la suite.
- La partie II demande de justifier que  $E$  peut être muni d'une structure préhilbertienne. Les méthodes sont ultra classiques et doivent être bien connues.
- La partie suivante introduit un opérateur de fonction  $U : f \longmapsto U(f)$  dont l'étude va faire l'objet de toute la partie. On montre notamment que  $U$  définit un endomorphisme sur  $E$ , puis qu'il est symétrique pour le produit scalaire introduit dans la partie précédente.
- La partie IV s'intéresse aux solutions développables en séries entières d'une famille d'équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux. On s'intéresse notamment aux solutions polynomiales et on justifie que ce sont les seules solutions appartenant à  $E$ .
- La dernière partie du sujet fait le lien entre les équations différentielles de la partie IV et les éléments propres de l'endomorphisme  $U$ .

Ce sujet est long mais très bien écrit. Les trois premières parties portent principalement sur les fonctions d'une variable réelle et sur les intégrales impropres, avec une touche d'espaces préhilbertiens. La partie IV utilise le cours sur les séries entières. Bien qu'elle se focalise sur les éléments propres de  $U$ , elle n'utilise pas à proprement parler d'outils d'algèbre linéaire. C'est un sujet agréable à chercher, très détaillé, qui ne comporte pas de difficulté particulière. Il est parfait pour réviser les chapitres sus-cités.

## INDICATIONS

### Partie I

- 1 Chercher un équivalent de  $t \mapsto p_\alpha(t)e^{-t}/t$  en 0 et en  $+\infty$ .
- 2 Même technique qu'à la question précédente.
- 3 Même technique qu'aux deux questions précédentes.
- 4 Chercher un équivalent en 0 de  $t \mapsto (e^t - 1)^2 e^{-t}/t$  à l'aide d'un développement limité.
- 5 Déterminer l'expression de  $k_x$  sur  $]0; x]$  et sur  $[x; +\infty[$ .
- 6 Justifier que si  $g$  est intégrable sur un intervalle  $]a; b[$ , alors

$$x \mapsto \int_a^x g(t) dt \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_x^b g(t) dt$$

sont des primitives respectivement de  $g$  et  $-g$  de limite nulle respectivement en  $a$  et  $b$ . Calculer ensuite  $\Phi'(x)$  à l'aide des formules usuelles de dérivation d'un produit.

- 7 Intégrer  $f'$  entre  $\alpha$  et  $x$  puis majorer  $|f(x)|$  par inégalité triangulaire avant de faire tendre  $\alpha$  vers 0. Conclure avec le résultat de la question 6.
- 8 Raisonner par comparaison à l'aide de la majoration de la question 7.

### Partie II

- 9 Utiliser l'inégalité  $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$
- 10 Utiliser la question 9 pour montrer la stabilité de E par combinaisons linéaires.
- 11 Justifier que l'application est symétrique, bilinéaire et définie positive.
- 12 Séparer l'intégrale comme somme des intégrales entre  $]0; x]$  et  $[x; +\infty[$ . Dans la deuxième, majorer  $1/t$  par  $1/x$ .
- 13 Établir une formule de récurrence par intégration par parties.
- 14 Donner un contre-exemple avec le résultat de la question précédente.

### Partie III

- 15 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le résultat de la question 12.
- 16 Séparer l'intégrale en deux et simplifier l'expression de  $k_x(t)$ .
- 17 Mêmes indications qu'à la question 6.
- 18 Même technique qu'à la question 17.
- 19 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la première majoration. Pour la seconde, même astuce qu'à la question 12.
- 20 Utiliser les résultats des questions 15 et 19 pour appliquer la sous-section I.B à  $U(f)$ . Utiliser ensuite le résultat de la question 7.
- 21 Intégrer  $t \mapsto (U(f)(t))^2 e^{-t}/t$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  après avoir utilisé la majoration de la question 20.
- 22 Utiliser le résultat de la question 18.
- 23 Justifier à l'aide du résultat de la question 17 que  $t \mapsto |\sin t|$  est un élément de E qui n'appartient pas à Im U.

- 24 Utiliser le résultat de la question 17 et les arguments de l'indication 6.
- 25 Utiliser le résultat des questions 19 et 20.
- 26 Découper l'intégrale  $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  comme somme des deux intégrales entre  $]x; 1]$  et  $[1; +\infty[$ . Majorer  $e^{-t}$  par 1 dans la première et  $1/t$  par 1 dans la seconde.
- 27 Utiliser les majorations des questions 20, 25 et 26 pour montrer que  $F U(g)$  a des limites nulles en 0 et en  $+\infty$ .
- 28 Faire une intégration par parties.
- 29 Utiliser la commutativité du produit dans  $\mathbb{R}$ , la symétrie du produit scalaire, et l'égalité de la question 28.

#### Partie IV

- 30 Dériver terme à terme la série entière puis injecter le résultat dans l'équation différentielle. Utiliser enfin l'unicité d'un développement en série entière.
- 31 Pour le sens direct, appliquer la relation de récurrence pour  $n = \deg f$  où  $f$  est une solution polynomiale non nulle. Pour la réciproque, construire par récurrence une suite qui vérifie la relation de la question 30.
- 32 Calculer  $x(h''(x) + h'(x)) + ph(x)$  pour  $x > 0$ .
- 33 Penser au produit de Cauchy.
- 34 Justifier le résultat par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 35 Écrire  $g_p$  comme somme d'une série entière puis dériver  $p$  fois terme à terme afin d'utiliser le résultat de la question 34.
- 36 Même principe qu'à la réciproque de la question 31.
- 37 Utiliser la relation de récurrence de la question 30.
- 38 Démontrer le résultat par récurrence sur  $n \geq q$ .
- 39 Utiliser la question précédente pour minorer  $\psi$  par une quantité faisant intervenir  $e^{x/2}$  et un polynôme à déterminer.
- 40 Justifier que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de signe constant à partir d'un certain rang pour établir un lien entre  $f$  et  $\psi$ .

#### Partie V

- 41 Se souvenir du résultat de la question 22.
- 42 Dériver deux fois l'égalité  $U(f) = \lambda f$  et utiliser la question 18.
- 43 Raisonner par l'absurde et utiliser le résultat de la question 40.
- 44 Penser à justifier que  $P$  appartient à  $E$ . Utiliser la question 18 et le fait que  $P$  est solution de  $(E_p)$ .
- 45 Résoudre l'équation différentielle  $y'' - y' = 0$  et utiliser le résultat de la question 3.
- 46 Adapter la preuve du résultat de cours assurant que les espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien sont deux à deux orthogonaux.

## I. PRÉLIMINAIRES : ÉTUDE DE QUELQUES ÉLÉMENTS DE E

**1** Soit  $\alpha > 0$ . Notons  $\varphi : t \mapsto p_\alpha(t)^2 e^{-t}/t$ . La fonction  $p_\alpha : t \mapsto t^\alpha = \exp(\alpha \ln t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  par composition de fonctions continues. Il en est donc de même pour  $\varphi$ . De plus,

$$p_\alpha(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} = t^{2\alpha} \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-2\alpha}}$$

Puisque  $\alpha > 0$ ,  $1 - 2\alpha < 1$  et le critère de Riemann assure l'intégrabilité de  $\varphi$  au voisinage de 0. Par ailleurs, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , par croissances comparées,

$$t^2 p_\alpha(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{1+2\alpha} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

de sorte que

$$p_\alpha(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$$

Le critère de Riemann garantit à nouveau l'intégrabilité de  $\varphi$  au voisinage de  $+\infty$ , et ainsi sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Par conséquent,

Pour tout  $\alpha > 0$ ,  $p_\alpha$  appartient à E.

Dans ce type de question élémentaire de début d'énoncé, il faut prendre un soin particulier à n'oublier aucun argument. Ici, il est important de mentionner la continuité de la fonction. Par ailleurs, il est conseillé de ne pas parachuter la domination en  $o(1/t^2)$  sans la justifier proprement au moins une fois dans sa copie.

**2** La fonction P est polynomiale donc continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Notons une nouvelle fois  $\varphi : t \mapsto P(t)^2 e^{-t}/t$  et cherchons sous quelles conditions  $\varphi$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Soit  $n$  le degré de P et  $a_n$  son coefficient dominant. La fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , on a l'équivalent

$$P(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_n t^n$$

d'où à nouveau  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_n^2 t^{2n-1} e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$

La fonction  $\varphi$  est donc dans tous les cas intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

Au voisinage de 0, on distingue deux cas :

- Si  $P(0) \neq 0$ ,  $P(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{P(0)^2}{t}$

Le critère de Riemann assure alors que  $\varphi$  n'est pas intégrable au voisinage de 0.

- Si  $P(0) = 0$ , alors  $P(t) = \underset{t \rightarrow 0}{O}(t)$  de sorte que

$$P(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} = \underset{t \rightarrow 0}{O}(t)$$

En particulier,  $\varphi$  est de limite nulle en 0 donc prolongeable par continuité en 0 et ainsi intégrable au voisinage de cette borne réelle.

## Centrale Informatique MP-PC-PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par William Aufort (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

---

Ce sujet traite de Formule 1. Il aborde deux façons de modéliser un circuit et étudie la gestion des résultats par une base de données relationnelle.

- La première partie présente une modélisation de circuit sous la forme d'une liste de caractères alphabétiques décrivant des lignes droites ou des virages à angle droit. Il faut écrire quelques fonctions vérifiant la validité d'un circuit, puis le tracer à l'aide de la bibliothèque graphique `turtle` dont les fonctions principales sont décrites dans l'annexe.
- La partie suivante propose une modélisation du circuit plus réaliste car elle prend en compte des virages en arc de cercle. Il faut à nouveau dessiner le circuit, d'abord avec `turtle`, ensuite au moyen de primitives de plus bas niveau.
- Dans la partie III, on modélise le temps de course. La première moitié est théorique et demande de résoudre les équations différentielles cinématiques. La seconde moitié utilise ces résultats pour calculer avec Python le temps minimal nécessaire pour finir la course.
- Enfin, la dernière partie pose quelques questions de SQL exploitant les données de six tables.

Ce sujet original est de difficulté très variable. Il associe des questions de géométrie et de physique à de la programmation, c'est en cela un bon sujet de modélisation. Malheureusement, certaines questions sont trop imprécises, et les réponses à apporter dépendent de la façon de les interpréter. Pareille latitude dans la réponse est commune dans les métiers d'ingénieur et de chercheur, mais n'est pas habituelle en prépa.

Les trois parties de Python sont très guidées mais d'une manière qui peut ne pas sembler naturelle. Le lien entre les questions n'est pas toujours évident, et leur enchaînement parfois déroutant.

Outre la répétition de tracés de circuits de Formule 1, ce sujet permet de s'entraîner au méta-jeu consistant à se mettre dans la tête des concepteurs de l'épreuve pour deviner les réponses attendues à des questions accidentellement floues, ou encore de s'attaquer à une base de données relationnelle impliquant un nombre de tables inhabituel.

## INDICATIONS

- 4 On pourra se demander comment un demi-tour est modélisé en représentation minimale. Si cela aide, on peut faire l'hypothèse pour cette question que la représentation d'un circuit commence forcément par une ligne droite.
- 5 Maintenir à jour trois variables caractérisant la position et l'orientation de la voiture tout au long du circuit.
- 6 En conservant l'historique des positions atteintes pendant un parcours du circuit, on peut vérifier à chaque étape que c'est la première fois qu'on atteint ce point. Il est alors pertinent de se demander si l'on a besoin d'appeler les fonctions `contient_demi_tour1` et `est_fermé1`.
- 8 Utiliser la fonction `isinstance` donnée dans l'annexe pour vérifier le type de `e`. Attention à bien traiter tous les cas.
- 9 Il est conseillé de s'aider de dessins pour visualiser les conséquences des signes des arguments de la fonction `turtle.circle` telles que décrites par l'annexe.
- 11 Considérer le cas où le vecteur `pos` envoyé à la fonction fait un angle `dir` avec l'horizontale.
- 12 On pourra commencer par écrire les deux fonctions annexes `fin_de_virage` et `fin_de_ligne_droite` qui calculent respectivement la position de sortie d'une ligne droite ou d'un virage. Le dessin doit partir du centre de l'écran, dont la position peut être déterminée à l'aide des dimensions du tableau `s`, accessibles avec `s.shape`.
- 17 Dans ce cas, le segment est parcouru en deux parties : la première pendant laquelle le pilote accélère de  $v_1$  jusqu'à  $v_{\max}$ , la seconde dans laquelle il freine de  $v_{\max}$  jusqu'à  $v_2$ .
- 18 Dans ce cas, le segment est parcouru en trois parties : les deux parties d'accélération et de freinage, séparées par une partie à vitesse constante  $v_{\max}$ .
- 20 Remarquer que l'on peut calculer la vitesse maximale d'entrée d'un élément si l'on connaît celle de l'élément suivant. En déduire un algorithme parcourant le circuit en sens inverse.
- 21 Commencer par gérer le cas où l'on soulève une exception `raise ValueError`. Gérer ensuite le cas où l'on peut accélérer durant toute la ligne droite. Les trois cas restants correspondent aux résultats des questions 17, 18 et 19.
- 22 Parcourir le circuit `c` et la liste de vitesses retournée par `vitesses_entrée_max` en même temps. Pour chaque élément, calculer le temps mis à le parcourir et retourner la somme de tous ces temps.
- 23 Ne pas chercher trop complexe : le corps de la fonction peut s'écrire en une ligne seulement avec un circuit bien choisi.
- 26 Utiliser les données numériques présentes dans l'introduction du problème.
- 27 Cette requête nécessite des données provenant de cinq tables. Pour calculer les différents temps des courses, additionner les temps des différents tours en question à l'aide des commandes `GROUP BY` et `SUM`.
- 29 Commencer par expliquer la sous-requête imbriquée.

## I. MODÉLISATION SOMMAIRE D'UN CIRCUIT

**1** Dans la représentation proposée, les virages "G" et "D" se faisant sur place, seule la lettre "A" représente des portions de route. On peut les compter à l'aide de la méthode `count` donnée à la fin de l'énoncé. Il faut ensuite multiplier leur nombre par leur longueur `d` pour obtenir la longueur totale de la route.

```
def longueur1(c: [str], d: int) -> int:
    return d * c.count("A")
```

Cette solution est la plus courte et la plus idiomatique, mais il est bien sûr possible de réimplémenter la méthode `count` manuellement, par exemple avec une boucle `for`.

```
def longueur1(c: [str], d: int) -> int:
    n = 0
    for e in c:
        if e == "A":
            n += 1
    return d * n
```

On notera que le sujet n'impose pas de recopier les annotations de type. On a fait le choix de le faire ici pour des raisons pédagogiques.

**2** Comme on le voit à la ligne 5, la fonction `représentation_minimale` examine chaque élément de la liste `c` un par un. Quand ces éléments correspondent à des virages, elle incrémente ("G") ou décrémente ("D") la variable `nbg` modulo 4. Lorsqu'elle arrive sur une ligne droite, elle ajoute au résultat `res` l'élément de `virages` dont l'indice correspond à la valeur de `nbg`, remet cette variable à zéro et ajoute enfin la ligne droite à `res`. On en conclut que

À tout moment, la variable `nbg` contient le nombre de virages de  $90^\circ$  à gauche qu'il faut effectuer pour tourner d'un angle égal à celui résultant de la séquence de virages effectués depuis la dernière ligne droite.

Par suite, L'expression proposée vaut ["A", "A", "D", "A"].

**3** Comme son nom l'indique, la fonction `représentation_minimale` calcule un circuit de longueur minimale qui a la même représentation graphique que le circuit qu'on lui passe en argument.

L'énoncé est très ambigu quant aux contraintes sur les circuits. En effet, alors que la ligne 14 de la fonction montre clairement que des virages peuvent se trouver en fin de liste, l'énoncé ne précise pas s'il est autorisé pour la représentation d'un circuit de commencer par un virage. Le fait que cette contrainte n'est jamais explicitée rend difficile à évaluer s'il s'agit vraiment d'une hypothèse implicite de l'énoncé, ou d'une négligence qui rend accidentellement certaines questions beaucoup plus difficiles qu'elles ne devraient être.

Cette contrainte est importante car la fonction ne remplit pas son contrat dans le cas général. En effet, en faisant l'hypothèse raisonnable que deux circuits identiques à une rotation près sont équivalents, des virages en début

et fin d'un circuit fermé ne se simplifieraient pas, comme par exemple dans le circuit suivant : GAGAGAAGAGAD. Si les circuits ne peuvent commencer que par un "A", alors la fonction est correcte.

4 On peut détecter les demi-tours du circuit en cherchant deux lettres "G" consécutives dans sa représentation minimale. Le sujet ne précisant pas si la représentation donnée à la fonction est minimale ou non, on commence par calculer la représentation minimale au cas où. On regarde ensuite chaque paire d'éléments consécutifs à la recherche de deux lettres "G" successives.

```
def contient_demi_tour1(c: [str]) -> bool:
    c_minimale = représentation_minimale(c)
    # Vérification du circuit
    for i in range(len(c_minimale) - 1):
        if c_minimale[i:i+2] == ["G", "G"]:
            return True
    return False
```

Cette question est remarquablement peu claire, et sans doute beaucoup plus complexe à résoudre que les concepteurs du sujet ne le prévoyaient. En effet, son résultat dépend de plusieurs hypothèses qui ne sont qu'implicites. Doit-elle fonctionner pour tous les circuits, ouverts et fermés ? Dans le cas des circuits fermés, doit-on faire l'hypothèse qu'ils sont parcourus plusieurs fois ? Les circuits peuvent-ils commencer par un virage ? Chacun de ces cas implique des réponses différentes.

Essayons d'être bienveillant avec l'énoncé et de lire entre les lignes. Le fait que cette question suive immédiatement celle de la représentation minimale, et qu'une question impliquant des positions n'arrive qu'à la question 6, suggère que l'énoncé attend que l'on utilise seulement la représentation minimale. Par ailleurs, le fait que la question 5 demande d'écrire une fonction vérifiant si le circuit est fermé laisse à penser que la fonction attendue ici ne doit pas faire cette vérification. On a alors deux possibilités : soit il est attendu que la fonction `contient_demi_tour1` considère tous les circuits comme ouverts (et qu'elle a donc le droit de se tromper sur les circuits en boucle), soit qu'elle les considère tous comme fermés et parcourus plusieurs fois (et qu'elle a le droit de se tromper sur les circuits ouverts).

Le premier cas est le plus simple et était probablement celui qui était attendu (c'est la réponse que l'on donne dans ce corrigé). Mais c'est alors un exemple de mauvaise conception de sujet, puisque cette fonction n'est pas réutilisable à la question 6, qui doit être correcte pour les circuits en boucle.

Le deuxième cas, sûrement le plus naturel étant donnés les termes du sujet, est beaucoup plus complexe car il demande de gérer tous les cas particuliers impliquant des virages au début et à la fin du circuit (réfléchir par exemple à AGADADADAAA, GAGADADADAAG ou encore GGAGAGAGAD). La solution la plus simple dans ce cas serait probablement de commencer par placer tous les virages initiaux à la fin du circuit, et de calculer la représentation minimale de ce nouveau circuit, équivalent au circuit donné mais où chaque demi-tour est bien équivalent à deux "G" consécutifs.

Bref, à question maladroite beaucoup de bonnes réponses, certaines faisant perdre plus de temps que d'autres. Dans ce genre de cas, aller au plus simple et briser le quatrième mur en expliquant en quelques lignes pourquoi l'énoncé est déroutant est généralement une bonne stratégie.

## Mines Maths 1 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (professeur en CPGE) ; il a été relu par Michèle Nouvet (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

---

L'objet de ce problème d'analyse est d'obtenir une suite dominante de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $p_n$  est le nombre de partitions d'un entier naturel  $n$ , défini au début de la partie C. Les parties B, C et D utilisent les résultats de la partie A mais peuvent être traitées indépendamment en admettant ces derniers.

- Dans la partie A, on étudie deux fonctions définies sur le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ , la somme  $L$  d'une série entière et la limite  $P$  d'un produit. Cette partie est très abordable et proche du cours.
- La partie suivante établit un développement asymptotique au voisinage à droite de 0 de la quantité  $P(e^{-t})$ , dont le résultat sera utilisé dans la partie E. On y utilise à la fois de l'analyse classique de première année et des théorèmes d'interversion séries-intégrales de PC.
- La troisième partie définit et étudie le nombre  $p_n$ , notamment en reliant la série entière  $\sum p_n z^n$  aux fonctions  $L$  et  $P$  de la partie A. Les questions 17 et 18 sont les deux seules questions de combinatoire du sujet. La dernière question revient à démontrer la formule intégrale de Cauchy pour les fonctions de la variable complexe, adaptée à ce cadre.
- Dans la partie D, on majore le module d'une quantité dépendant de la fonction  $P$  de la question 21. Les calculs sont un peu techniques mais bien guidés par l'énoncé.
- Enfin, la dernière partie conclut sur une suite dominante de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , proche d'un équivalent montré par Hardy et Ramanujan en 1918. Elle est constituée d'une unique question, abordable en admettant les résultats intermédiaires.

Comme souvent, ce problème de combinatoire est relié à des notions d'analyse, pour une fois sans probabilités. Il nécessite beaucoup de manipulations d'inégalités et de majorations d'intégrales.

Le travail s'effectue surtout sur les séries entières. On utilise divers théorèmes d'analyse de PC comme l'intégration terme à terme, les intégrales à paramètres et la convergence normale, ce qui permet de balayer l'essentiel du programme d'analyse de prépa. Seule la partie D est abordable dès la première année et peut être extraite pour s'entraîner avant la PC.

Par ailleurs, on peut retrouver un lien entre les partitions d'un entier naturel  $n$  et les classes de conjugaison du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  (les permutations de  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ) dans le sujet Centrale Maths 1 MP 2020.

## INDICATIONS

### Partie A

- 1 Majorer le terme général de la série et reconnaître une primitive d'une série géométrique.
- 2 Dériver terme à terme la série entière  $\Phi$  de la variable  $t$ .
- 3 Montrer que  $\Psi' = 0$ .
- 4 Utiliser l'inégalité triangulaire pour les séries absolument convergentes.
- 5 Étudier les sommes partielles de la série définie dans la question 4.

### Partie B

- 6 Pour la parité de  $|q|$ , distinguer les cas suivant le signe de  $q(x)$ .
- 8 Calculer

$$\int_k^{k+1} \frac{q(u)}{u} du$$

puis sommer et se ramener à des sommes télescopiques.

- 9 Poser  $n = \lfloor x \rfloor$ , majorer l'intégrale, puis utiliser la formule de Stirling.
- 10 Développer en série l'intégrande à l'aide de la fonction L puis intégrer terme à terme.
- 11 Après avoir montré l'indication de l'énoncé, majorer l'intégrande à l'aide de cette fonction.
- 12 Appliquer le théorème de continuité d'une intégrale à paramètres sur  $\mathbb{R}_+^*$ , puis montrer la continuité en 0 à l'aide d'un équivalent.
- 13 Distinguer les cas des indices pairs et impairs, puis appliquer le critère spécial des séries alternées.
- 14 Montrer que la convergence de  $\sum_{k \geq 1} u_k$  est uniforme sur  $\mathbb{R}_+$  puis utiliser la continuité en 0 de la somme.

- 15 Calculer

$$\int_n^{n+1} \frac{tq(u)}{e^{tu} - 1} du$$

à l'aide d'une intégration par parties. Sommer pour  $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$  puis étudier les limites quand  $N \rightarrow +\infty$ .

- 16 Isoler le terme  $\ln(P(e^{-t}))$  dans le résultat de la question 15 puis utiliser le changement de variable  $v = tu$  dans l'intégrale.

### Partie C

- 17 Établir une injection de  $P_{n,N}$  dans  $P_{n,N+1}$  et montrer que c'est une bijection pour tout  $N \geq n$ .
- 18 Développer le quotient en série géométrique. Pour l'hérédité de la récurrence, effectuer un produit de Cauchy de séries absolument convergentes et partitionner  $P_{n,N+1}$  suivant la valeur du dernier terme de la liste.
- 19 Utiliser le résultat de la question 17 pour majorer la somme.
- 20 Utiliser le résultat de la question 17 et l'inégalité triangulaire, puis le résultat de la question 18.
- 21 Intégrer terme à terme le développement en série de  $P(e^{-t}e^{i\theta})$ .

**Partie D**

- 22 Calculer le module avec la formule  $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , puis majorer une somme de réels négatifs par son premier terme. Pour la seconde partie de la question, majorer des sommes partielles d'ordre  $N$  par des sommes géométriques et étudier les limites quand  $N \rightarrow +\infty$ .
- 23 Calculer le module de la partie réelle puis le minorer. Pour la seconde partie de la question, utiliser l'indication de l'énoncé.
- 24 Utiliser qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Appliquer les inégalités de la question 23 à  $x = e^{-t}$ .
- 25 Majorer

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\beta (t^{-3/2}\theta)^2\right) d\theta \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\gamma (t^{-3/2}\theta)^{2/3}\right) d\theta$$

en utilisant la parité des intégrandes, le changement de variable  $u = t^{-3/2}\theta$ .

**Partie E**

- 26 Utiliser les résultats des questions 16, 23 et 21.

## A. FONCTIONS L ET P

**1** Soit  $z \in \mathbb{D}$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\left| \frac{z^n}{n} \right| \leq |z|^n$$

qui est le terme général d'une série géométrique convergente car  $|z| < 1$ . Ainsi la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$$

converge absolument, donc converge.

Pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$  converge.

La série entière

$$\sum_{n \geq 1} z^{n-1}$$

a pour somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} z^m = \frac{1}{1-z}$$

sur l'intervalle de réels  $] -1; 1 [$  car c'est une série géométrique. En intégrant terme à terme cette série entière entre 0 et  $t \in ] -1; 1 [$ , comme le terme constant est nul, on obtient

$$\forall z \in ] -1; 1 [ \quad \mathbf{L}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$

On peut aussi affirmer d'après le cours que l'on a le développement en série entière suivant

$$\forall x \in ] -1; 1 [ \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

d'où

$$\forall z \in ] -1; 1 [ \quad \mathbf{L}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} (-z)^n}{n} = -\ln(1-z)$$

**2** Soit  $z \in \mathbb{D}$  avec  $z \neq 0$  et posons  $a = 1/|z|$ . On a  $a > 1$ . Pour tout  $t \in ] -a; a [$ , on a  $|tz| < 1$ , de sorte que la quantité

$$\Phi(t) = \mathbf{L}(tz) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} t^n$$

est bien définie. De plus, la fonction  $\Phi$  est la somme d'une série entière de la variable  $t$ . Notons  $R$  son rayon. Si  $z = 0$ , alors  $\Phi(t) = 0$ . Sinon,  $z \neq 0$  et si  $|t| < 1/|z|$ , alors

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{n+1} t^{n+1}}{\frac{z^n}{n} t^n} \right| = \frac{n}{n+1} |z| |t| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z| |t| < 1$$

D'après le critère de d'Alembert, cette série entière converge, donc  $R \geq 1/|z| > 1$ . En tant que série entière,  $\Phi$  est dérivable sur  $] -R; R [$ , et en dérivant terme à terme, il vient, pour tout  $t \in ] -1; 1 [ \subset ] -R; R [$ ,

$$\Phi'(t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{L}(tz)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} n t^{n-1} = z \sum_{n=1}^{+\infty} (zt)^{n-1} = \frac{z}{1-tz}$$

## Mines Maths 2 PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hugo Koubbi (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Pierre Bosch (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

---

Ce sujet aborde différents thèmes : la réduction des endomorphismes, l'algèbre linéaire de première année, les polynômes et les systèmes différentiels. Le sujet propose d'établir, pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une caractérisation du comportement asymptotique d'une solution en lien avec le polynôme caractéristique de la matrice associée au système.

Les trois premières parties sont indépendantes.

- Dans la partie I, le sujet étudie les matrices semi-simples, c'est-à-dire les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Le sujet propose de montrer que ces matrices sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  à une matrice diagonale par blocs dite presque diagonale. Les questions finales constituent un bon entraînement pour revoir les notions d'algèbre linéaire de seconde année.
- Dans la partie suivante, on montre une caractérisation des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  : une matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  si et seulement si tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{C}^n$  admet un supplémentaire stable par l'endomorphisme canoniquement associé à  $M$ .
- Dans la partie III, on prouve une caractérisation des polynômes de Hurwitz en fonction du signe des coefficients de certains polynômes. Les questions sont abordables avec une bonne connaissance du cours, à l'exception de la dernière qui est nettement plus difficile.
- Dans la dernière partie, on étudie un système différentiel associé à une matrice  $M$ . On montre notamment le lemme de Gronwall, exercice classique sur les équations différentielles.

Ce sujet requiert une bonne connaissance du cours de seconde année. En particulier, il faut être à l'aise avec les notions et les techniques de base de réduction, ainsi qu'avec les équations différentielles et l'algèbre linéaire. Une subtilité du sujet consiste à manipuler des espaces que l'on peut considérer comme des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels mais aussi comme des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, ce qui donne lieu à des difficultés dans les raisonnements. Le sujet est relativement progressif et les questions de synthèse sont les plus difficiles. C'est donc un bon entraînement pour les écrits.

## INDICATIONS

- 2 Calculer  $BW_1$  et  $BW_2$ . Considérer l'endomorphisme canoniquement associé à  $B$ : que dire de la matrice de cet endomorphisme dans la base  $(W_1, W_2)$  ?
- 3 Reproduire le raisonnement de la question 2. Pour montrer que  $(W_1, W_2)$  forme une base de  $\mathbb{R}^2$ , on se ramènera à une combinaison linéaire de  $V$  et  $\bar{V}$ .
- 4 Pour le sens direct, on pourra distinguer selon le degré du polynôme

$$\prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)$$

annulateur de  $M$  scindé à racines simples.

- 5 Traiter le cas d'un bloc  $M(a, b)$ , puis faire un calcul par blocs.
- 6 Considérer une base de vecteurs propres notée  $(V_1, \dots, V_p, Z_1, \bar{Z}_1, \dots, Z_q, \bar{Z}_q)$  du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}^n$ . En posant, pour tout entier  $i \in \llbracket 1; q \rrbracket$ ,  $X_i = \text{Re}(Z_i)$  et  $Y_i = \text{Im}(Z_i)$ , montrer que  $(V_1, \dots, V_p, X_1, Y_1, X_2, \dots, Y_q)$  forme une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ . Considérer ensuite la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à  $N$  dans cette base.
- 8 Montrer que  $\text{Vect}(v_k) \in \mathcal{A}$ , où  $v_k$  est un vecteur vérifiant les conclusions de la question 7.
- 9 Considérer un espace  $H$  dans  $\mathcal{A}$  de dimension  $r$ , puis supposer par l'absurde que  $H$  est différent de  $E$ . Utiliser ensuite la question 7.
- 10 Considérer un supplémentaire d'un hyperplan stable par  $u$  grâce à la question 9, puis conclure à une absurdité.
- 13 Utiliser la forme des polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  rappelée par l'énoncé.
- 14 On pourra considérer le coefficient de degré 3 de  $Q$ .
- 16 Pour le sens réciproque, on pourra distinguer selon que la racine  $\alpha$  de  $P$  est réelle ou non, et utiliser la question 11. Pour le sens direct, on pourra raisonner par récurrence sur le nombre de facteurs irréductibles de  $P$ .
- 17 Si  $X$  est solution de  $(S)$ , en utilisant le fait qu'il existe une matrice de passage  $P$  telle que  $M = PTP^{-1}$ , montrer que  $P^{-1}X$  est une solution de  $(S^*)$ .
- 18 Commencer par résoudre l'équation différentielle vérifiée par  $z$ . En identifiant ensuite les parties réelle et imaginaire de  $z$ , on trouvera  $x$  et  $y$ .
- 19 Pour montrer que la condition est nécessaire, commencer par traiter le cas où  $Y$  est une solution du problème  $(S^*)$ . Choisir des conditions initiales adaptées pour se ramener à ce cas. Pour le sens direct, on pourra utiliser la question 17 et la forme des solutions du problème  $(S^*)$ .
- 20 On commencera par calculer la différentielle de  $h : x \mapsto \langle x | x \rangle$ , puis on pourra dériver la fonction  $g : t \mapsto e^{2\beta t} \|\phi(t)\|^2$  définie dans l'indication. Pour ce calcul, on pourra utiliser l'expression de la différentielle de  $h$  et la règle de la chaîne.
- 21 Pour  $A_2$  implique  $A_1$ , remarquer que les coordonnées d'une solution de  $(S^*)$  sont des combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution de  $(S)$ . En utilisant la question 6, se ramener au cas d'une matrice presque diagonale. Conclure en faisant des calculs par blocs soit en utilisant la question 19 pour les blocs de taille 2, soit en résolvant une équation différentielle du premier ordre pour les blocs de taille 1. Pour  $A_1$  implique  $A_3$ , on commencera par montrer l'inégalité pour  $(S^*)$  en utilisant la question 20, après avoir vérifié que la matrice  $N$  vérifie la condition  $(C)$ . Pour se ramener au système  $(S)$ , on utilisera une propriété de la continuité de la multiplication par une matrice.

## I. MATRICES SEMI-SIMPLES

**1** Commençons par calculer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

à l'aide du polynôme caractéristique. Pour les matrices de taille  $2 \times 2$ , nous avons l'expression suivante

$$\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$$

Ici,  $\text{Tr}(A) = 4$  et  $\det(A) = 4$ . Il s'ensuit

$$\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$$

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines du polynôme caractéristique, on obtient donc  $\text{sp}(A) = \{2\}$ .

Quitte à se placer dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , la matrice  $A$  admet deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$  complexes conjuguées car le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{C}[X]$  et à coefficients réels. Pour les matrices de taille  $2 \times 2$ , les valeurs propres sont les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \det(A) = \lambda \bar{\lambda} = 4 \\ \text{Tr}(A) = \lambda + \bar{\lambda} = 4 \end{cases}$$

Ainsi,  $|\lambda| = 2$  et  $\text{Re}(\lambda) = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} = 2$  d'où  $\lambda = 2 = \bar{\lambda}$ . De cette manière, on retrouve le spectre de  $A$ .

La matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  si et seulement si il existe un polynôme annulateur de  $A$  scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}[X]$ . Comme  $\text{sp}(A) = \{2\}$ , c'est le cas si et seulement si  $A - 2I_n = 0$ . Comme  $A \neq 2I_n$ , on en déduit que

La matrice  $A$  n'est pas semi-simple.

Une autre méthode pour conclure est de supposer par l'absurde que  $A$  est diagonalisable. Comme la seule valeur propre de  $A$  est 2, il existe  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = P(2I_2)P^{-1} = 2I_2$$

car  $I_2$  et  $P$  commutent.

**2** Commençons par calculer le polynôme caractéristique de  $B$  :

$$\chi_B = X^2 - \text{Tr}(B)X + \det(B) = X^2 - 4X + 13$$

Le discriminant du polynôme  $\chi_B$  est  $\Delta = 16 - 4 \times 13 = -36 < 0$ . Les valeurs propres de  $B$  sont les racines du polynôme caractéristique, soit

$$\lambda = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i \quad \text{et} \quad \mu = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i$$

Par conséquent,  $\chi_B$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ , on en déduit que  $B$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , autrement dit

La matrice  $B$  est semi-simple.

Déterminons à présent un vecteur propre pour  $B$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Soit  $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un tel vecteur propre, on a le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y = \lambda x \\ -5x + y = \lambda y \end{cases} &\iff \begin{cases} (1 - 3i)x = -2y \\ -5x = (3i + 1)y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{-1 + 3i}{2}x = y \\ \frac{-5}{3i + 1}x = y \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 2y = \lambda x \\ -5x + y = \lambda y \end{cases} &\iff \frac{-1 + 3i}{2}x = y \end{aligned}$$

Un vecteur propre associé à la valeur propre est alors donné par  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ (-1 + 3i)/2 \end{pmatrix}$ . Posons  $W_1 = \operatorname{Re}(V) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$  et  $W_2 = \operatorname{Im}(V) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ . La famille  $(W_1, W_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  car libre et de cardinal 2. Calculons

$$BW_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11/2 \end{pmatrix} = 2W_1 - 3W_2$$

et 
$$BW_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix} = 3W_1 + 2W_2$$

Ainsi, la matrice représentant l'endomorphisme canoniquement associé à  $B$  dans la base  $(W_1, W_2)$  est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

En notant  $Q$  la matrice inversible de passage de la base canonique à la base  $(W_1, W_2)$ , on a bien

$$B = Q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

**3** | Cette question généralise le résultat de la question précédente aux matrices de taille  $2 \times 2$  semi-simples à valeurs propres complexes non réelles conjuguées.

Montrons dans un premier temps que  $M$  est semi-simple. Par hypothèse,  $M$  admet deux valeurs propres complexes distinctes. Il s'ensuit que son polynôme caractéristique est scindé à racines simples et que  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , ce qui revient à dire que

La matrice  $M$  est semi-simple.

Soit  $V$  un vecteur propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\mu$ . Reproduisons le raisonnement de la question précédente et considérons  $W_1 = \operatorname{Re}(V)$  et  $W_2 = \operatorname{Im}(V)$ , de sorte que  $V = W_1 + iW_2$ . On a alors  $BV = \mu V$ . D'où

$$B(W_1 + iW_2) = (a + ib)(W_1 + iW_2)$$

donc 
$$BW_1 + iBW_2 = (aW_1 - bW_2) + i(bW_1 + aW_2)$$

## Mines Informatique MP-PC-PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

---

Ce sujet aborde le thème du magnétisme des matériaux et la modélisation de son aspect aléatoire. Il contient une brève introduction décrivant la différence entre les matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques, ainsi que l'importance de la température de Curie dans le comportement du matériau. Il est constitué de 4 parties indépendantes.

- Dans la partie I, on étudie l'évolution théorique de l'aimantation en fonction de la température. Cette évolution est définie à l'aide d'une relation non linéaire qu'il faut résoudre numériquement, ce qui donne l'occasion d'appliquer l'algorithme de recherche par dichotomie.
- La partie suivante fait intervenir des bases de données économiques (fournisseurs, matériaux, prix au kilogramme). Quatre questions de difficulté graduelle permettent de montrer ses compétences.
- La partie III, plus longue, étudie le modèle microscopique de l'aimantation à partir des sens *up* et *down* des spins présents à l'intérieur du matériau. L'échantillon est modélisé par un tableau à deux dimensions, où l'on cherche comment déterminer les éléments voisins notamment au bord de l'échantillon. Une recherche d'états typiques est réalisée par la méthode aléatoire de Monte-Carlo.
- Dans la dernière partie, il est question de reconnaissance de formes au sein des images produites précédemment. On réalise en particulier un marquage des domaines magnétiques dits de Weiss par la recherche des pixels voisins identiques. Une question aborde les fonctions récursives, une autre les piles.

Cette épreuve amène correctement un sujet complexe et le traite sous plusieurs aspects intéressants. Elle balaye l'ensemble du programme, avec des questions de difficulté progressive.

## INDICATIONS

### Partie I

- 3 Il faut reprendre l'algorithme de la recherche par dichotomie vu en cours et l'appliquer à cette fonction particulière qui possède un deuxième argument, constant.
- 4 La longueur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à chaque itération. Combien d'itérations sont réalisées avant d'arriver à la bonne précision ?
- 5 La construction de la liste est classique, réalisée à l'aide de la méthode `append`. Attention, deux cas sont possibles en fonction de la valeur de  $t$ .

### Partie II

- 7 Des colonnes de deux tables différentes sont nécessaires, il faut faire une jointure.
- 8 On doit récupérer le prix minimum et s'en servir pour sélectionner les bonnes lignes de la table obtenue par jointure. L'utilisation de l'opérateur `ORDER BY` ne donne pas le bon résultat ici.
- 9 On peut générer la table contenant le prix moyen de tous les matériaux, puis y sélectionner uniquement les prix moyens voulus en imbriquant la requête précédente à l'intérieur d'une nouvelle requête.

### Partie III

- 11 Il est possible d'adapter le code de la question précédente pour modifier les valeurs une ligne sur deux.
- 12 L'extraction des valeurs de  $s$  entre les indices  $a$  et  $b$  exclu se fait par `s[a:b]`.
- 13 Le plus simple est de traiter le cas général en premier, puis d'ajouter une modification de chaque voisin dans le cas où le spin se trouve sur un des bords de l'échantillon.
- 14 L'équation 3 de l'énoncé montre la nécessité d'une double boucle, sur l'ensemble des spins puis sur les voisins de chaque spin. On doit récupérer les voisins avec la fonction définie à la question 13.
- 15 Il faut retourner une valeur booléenne, vraie dans deux cas disjoints.
- 16 Quelle est la complexité de la fonction `energie` ?
- 17 Le tirage au hasard du spin à modifier est à réaliser avec la fonction `randrange`.
- 19 Comme à la question 18, la complexité du calcul de  $\Delta E$  est essentiel.
- 20 Quelle est la différence d'énergie  $\Delta E$  lorsqu'un spin change ? Peut-on simplifier le calcul, supprimer les sommes ?

### Partie IV

- 22 La fonction `explorer_voisinage` regarde simplement chaque pixel voisin de  $i$  pour éventuellement en modifier la couleur et exécuter à nouveau la fonction sur ce pixel. On ne demande pas la fonction qui crée une nouvelle couleur.
- 23 L'utilisation d'une pile se fait à l'aide d'une boucle itérant tant que la pile est non vide. La pile doit être initialisée avec la valeur  $i$ .
- 24 Il faut exécuter la fonction précédente pour chaque pixel non encore traité, sans oublier d'incrémenter `num` à chaque fois.

## I. TRANSITION PARAMAGNÉTIQUE/FERROMAGNÉTIQUE SANS CHAMP MAGNÉTIQUE EXTÉRIEUR

1 Pour importer uniquement quelques fonctions à partir de modules, il faut utiliser la syntaxe

```
from math import exp, tanh
from random import randrange, random
```

2 L'équation donnée doit être résolue avec la variable  $m$  et se met sous la forme

$$f(x, t) = x - \tanh\left(\frac{x}{t}\right) = 0$$

d'inconnue  $x$ .

```
def f(x, t):
    return x - tanh(x/t)
```

3 On utilise la recherche par dichotomie d'une solution à l'équation  $f(x, t) = 0$  où la variable est  $x$  alors que  $t$  est un paramètre fixé. Dans cet algorithme, on conserve deux valeurs correspondant aux deux bornes de l'intervalle dans lequel se trouve la solution, initialement  $[a, b]$ . À chaque itération, on divise la largeur de l'intervalle par 2, car en appelant  $m$  le milieu de l'intervalle,

- soit  $f(a, t)$  et  $f(m, t)$  sont de signes opposés et cela signifie que la solution se trouve entre  $a$  et  $m$ , on peut donc affecter  $m$  à la variable  $b$ ;
- soit  $f(a, t)$  et  $f(m, t)$  sont de même signe et cela signifie que la solution ne se trouve pas entre  $a$  et  $m$ , on peut donc affecter  $m$  à la variable  $a$ .

On continue les itérations jusqu'à ce que la largeur de l'intervalle soit inférieure à  $2\varepsilon$  pour obtenir un résultat final égal au milieu de l'intervalle. La solution réelle est nécessairement à une distance inférieure à  $\varepsilon$  de ce résultat.

```
def dichotomie(f, t, a, b, eps):
    while b - a > 2*eps:
        m = (a + b) / 2
        if f(a, t) * f(m, t) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a + b) / 2
```

4 À chaque itération, la largeur de l'intervalle de recherche est divisée par 2 à l'aide d'un nombre d'opérations toujours identique et indépendant de  $a$  et  $b$ . En nommant  $n$  le nombre d'itérations, on peut dire que l'algorithme est de complexité linéaire en  $n$ . Au bout de  $n$  itérations, la largeur de l'intervalle de recherche est  $(b - a) / 2^n$ . Il faut ainsi, pour sortir de la boucle, que

$$\frac{b - a}{2^n} \leq 2\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\frac{b - a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1}$$

soit

$$n \geq \log_2\left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right) - 1$$

donc

La complexité de la fonction `dichotomie` est en  $O\left(\log_2\left(\frac{b - a}{\varepsilon}\right)\right)$ .

5 Il faut, pour chacune des 500 valeurs  $t$  uniformément réparties entre  $t_1$  et  $t_2$ , appliquer la fonction `dicho` si  $t < 1$  (le matériau est alors ferromagnétique), ou simplement définir une aimantation nulle si  $t \geq 1$  (le matériau est alors paramagnétique).

```
def construction_liste_m(t1, t2):
    m = []
    n = 500
    pas = (t2 - t1) / (n - 1)
    for i in range(n):
        t = t1 + pas * i
        if t < 1:
            m.append( dicho(f, t, 0.001, 1, 1e-6) )
        else:
            m.append(0)
    return m
```

La figure 1 de l'énoncé peut être obtenue avec le code

```
t = [ 1.5*t/500 for t in range(1,501) ]
m = construction_liste_m(t[0],t[-1])
plt.plot(t,m)
plt.grid()
plt.show()
```

## II. RECHERCHE DANS UNE BASE DE DONNÉES DE MATÉRIAUX MAGNÉTIQUES

6 Pour obtenir le nom des matériaux ayant une température de Curie inférieure à 500 kelvins, il faut exécuter la sélection

```
SELECT nom FROM materiaux WHERE t_curie < 500;
```

7 Les noms de fournisseurs sont dans la table `fournisseurs` alors que les prix sont dans la table `prix`. Il faut donc réaliser une jointure avant la sélection, soit la requête

```
SELECT nom_fournisseur, prix_kg * 4.5
FROM fournisseurs JOIN prix ON id_fournisseur = id_four
WHERE id_mat = 8713;
```

8 Le prix minimal peut être obtenu par l'utilisation de la fonction d'agrégation `MIN` mais pas le fournisseur correspondant, car une telle fonction n'agit que sur une seule colonne du résultat. Ce n'est donc pas la projection (après l'opérateur `SELECT`) mais la sélection (après l'opération `WHERE`) qu'il faut modifier, en y incluant une condition sur le prix à l'aide d'une sous-requête, entre parenthèses.

```
SELECT nom_fournisseur, prix_kg * 4.5
FROM fournisseurs JOIN prix ON id_fournisseur = id_four
WHERE id_mat = 8713
AND prix_kg = (SELECT MIN(prix_kg) FROM prix WHERE id_mat = 8713);
```

Si l'on conserve la requête de la question 7 et que l'on classe les lignes à l'aide de `ORDER BY prix`, on ne peut alors pas savoir si plusieurs fournisseurs sont aussi compétitifs. Ce n'est donc pas une réponse valable.

## X/ENS Maths PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julie Gauthier (professeur agrégé) ; il a été relu par Antoine Barrier (ENS Paris-Saclay) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

---

Dans ce sujet, on travaille sur des ensembles convexes en dimension finie. On traite d'enveloppe convexe et de points extrémaux et on montre que s'il est fermé et borné, un convexe est égal à l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. En travaillant avec des convexes bien choisis, on s'intéresse aux solutions d'un système linéaire sous-déterminé, c'est-à-dire ayant moins d'équations que d'inconnues. En particulier, on cherche des solutions particulières d'un tel système.

- Dans la partie I, on montre des propriétés générales sur les ensembles convexes. On définit la notion de projection sur un convexe fermé, puis on montre que deux convexes sont séparables dès que leur intersection est vide. Ce résultat, sous sa forme stricte (question 6, dans le cas où ces convexes sont tous deux fermés et l'un d'eux est borné) comme sous sa forme large (question 8), s'avère utile dans les parties suivantes. Ces résultats de séparation de convexes constituent des cas particuliers du théorème de Hahn-Banach.
- La partie II introduit la notion de point extrémal et l'étudie avec quelques exemples. On y montre en particulier qu'un convexe fermé borné est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. C'est un cas particulier du théorème de Krein-Milman.
- La partie III caractérise les cônes convexes fermés. En outre, on utilise des résultats de dualité pour établir un lien entre les vecteurs  $x$  positifs vérifiant  $Mx \leq b$  (avec  $M$  une matrice et  $b$  un vecteur donnés) et les vecteurs  $q$  négatifs tels que  $M^T q \leq p$  (où le vecteur  $p$  est lui aussi fixé).
- Dans la partie IV, on se limite au cas où l'application linéaire associée à la matrice  $M$  est surjective et on s'intéresse aux vecteurs  $y$  solutions de  $My = b$  minimisant  $\|y\|_1$ . On majore enfin le nombre de coordonnées non nulles de ces  $y$  par la dimension de l'espace d'arrivée de  $M$ .

C'est un sujet long et difficile qui demande de mettre en œuvre de nombreux outils. Dans le corrigé, on fait souvent appel au théorème de Bolzano-Weierstrass rappelé dans l'énoncé. Néanmoins, il n'est pas au programme de PCSI et seuls les élèves de PSI ayant fait une MPSI sont habitués à le manipuler. Ce sujet n'est donc pas adapté aux élèves de PC.

## INDICATIONS

## Partie I

- 1 Pour l'unicité, se ramener au cas d'égalité d'une inégalité triangulaire. L'existence provient de l'utilisation du résultat d'extraction de sous-suites convergentes rappelé dans l'énoncé. Un raisonnement similaire permet de prouver le sens direct de l'équivalence demandée.
- 2 Raisonner par double implication. Le sens direct s'obtient en revenant à la définition de la norme euclidienne et en développant par identité remarquable la quantité  $\|x - ((1-t)y + tz)\|^2$  pour tout  $t \in [0; 1]$ , qui est minorée par  $\|x - y\|^2$  par définition de la projection sur  $C$ . L'implication réciproque s'obtient en remontant les calculs du sens direct dans le cas où  $t = 1$ .
- 3 Utiliser à deux reprises le résultat de la question 2 avec  $z$  le projeté de  $x_1$  (respectivement  $x_2$ ) sur  $C$ . La continuité s'obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- 4 À l'aide de dessins en dimension 2, intuitiver le résultat puis utiliser la définition de  $\text{proj}_C$  donnée dans la question 1 pour les items i et iv, et la caractérisation obtenue dans la question 2 pour les items ii et iii.
- 5 Pour le caractère fermé, utiliser la caractérisation séquentielle des fermés et le caractère borné de  $C$ , qui permet d'extraire une sous-suite convergente.
- 6 Prendre  $p = \text{proj}_{D-C}(0)$ ,  $\varepsilon = \|p\|^2$  et appliquer le résultat de la question 2 avec  $z = x - y$ .
- 7 Raisonner par double inclusion. Pour l'inclusion réciproque, raisonner par l'absurde et appliquer le résultat de la question 6 à  $C$  et  $\{x\}$  avec  $x \in S$  qui ne soit pas dans  $C$  afin d'obtenir que  $-p \cdot x > \sigma_C(-p)$ .
- 8 Dans le cas où  $x$  n'est pas dans l'adhérence de  $A$ , appliquer le résultat de la question 6 à  $\{x\}$  et à l'adhérence de  $A$ . Si  $x$  est dans l'adhérence de  $A$ , construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de limite  $x$  et dont les éléments ne sont pas dans l'adhérence de  $A$ . En appliquant le résultat précédent à  $x_n$ , construire une suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en imposant  $\|p_n\| = 1$ , et en extraire une sous-suite convergente.

## Partie II

- 11 Faire un dessin. Montrer que  $(0, 0, 0)$  n'est pas extrémal mais que tous les autres points de la forme  $(1 + \cos(\theta), \sin(\theta), 0)$  pour  $\theta \in [0; 2\pi] \setminus \{\pi\}$  le sont.
- 12 Pour montrer que  $A$  est fermé, on peut le voir comme intersection d'images réciproques d'intervalles fermés par des applications continues. L'équivalence se prouve par double implication. Pour le sens direct, on peut raisonner par contraposée et construire un segment non trivial contenant  $x$  inclus dans  $A$ . Enfin, montrer que  $x \mapsto I(x)$  est injective afin de relier le cardinal de  $\text{Ext}(A)$  au nombre de manières de choisir  $I(x)$  inclus dans  $\llbracket 1; k \rrbracket$ .
- 13 Pour l'inclusion demandée à la fin de la question, montrer que si  $x \in K_p \cap [y; z]$ , avec  $y, z \in K$ , alors  $y, z \in K_p$ .
- 14 Dans le cas où  $0 \in K$ , raisonner par récurrence forte sur  $\dim K$  en remarquant que  $\dim K_p < \dim K$ .
- 15 Pour l'inclusion réciproque, utiliser le résultat de la question 9. Pour l'inclusion directe, raisonner par récurrence sur la dimension de  $K$ . L'hérédité s'obtient par l'absurde en utilisant la propriété de séparation donnée dans la question 8 et l'inclusion montrée dans la question 13.

### Partie III

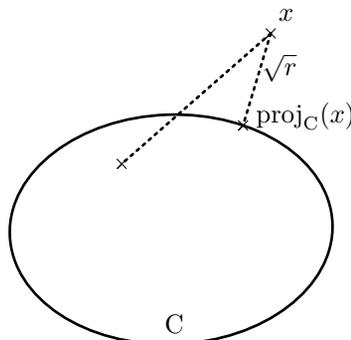
- 17 Une implication est immédiate. Pour l'autre, raisonner par l'absurde en prenant  $\xi \in E^{++} \setminus E$ . Séparer ensuite strictement  $\{\xi\}$  et  $E$  via le résultat de la question 6 pour obtenir une contradiction.
- 18 Cette question est extrêmement difficile. Le fait que  $F$  soit un cône convexe s'obtient rapidement. Traiter son caractère fermé après avoir montré que c'est un cône, raisonner par récurrence sur  $k$  et par caractérisation séquentielle. Écarter le cas où les opposés des  $\xi$  sont tous dans  $F$ . Traiter ensuite le cas où il existe au moins un  $\xi$  dont l'opposé n'est pas dans  $F$ . La coordonnée de notre suite selon le nouveau  $\xi$  peut être bornée ou non. Dans ce second cas, montrer que  $-\xi$  est dans  $F$ . C'est ici que le fait que  $F$  soit un cône est utile.
- 19 Dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont finis, utiliser la positivité de  $x$  et la négativité de  $q$  pour obtenir une inégalité. Le fait que  $q \cdot Mx = M^T q \cdot x$  s'avère aussi utile.
- 20.a Trouver  $\lambda > 0$  tel que  $x_\lambda = \bar{x} + \lambda z \geq 0$  et  $M \cdot x_\lambda \leq b$ .
- 20.b S'intéresser au cône  $F$  de la question 18 engendré par les familles  $(e_j)_{j \in J}$  (base canonique de  $\mathbb{R}^J$ ) et  $(-M_i)_{i \in I}$ . Utiliser l'équivalence montrée dans la question 18 et le résultat de la question 20.a pour montrer que  $p \in F$ , et donc le décomposer sous la forme  $p = \Lambda + M^T \bar{q}$  avec  $\Lambda \geq 0$  dont les seules coordonnées non nulles ont un indice dans  $J$ , et  $\bar{q} \leq 0$  dont les seules coordonnées non nulles ont un indice dans  $I$ . Montrer enfin que ce  $\bar{q}$  convient.
- 20.c Utiliser le  $\bar{q}$  construit dans la question 20.b et le résultat de la question 19.

### Partie IV

- 22 La surjectivité de  $M$  est nécessaire pour obtenir  $C \neq \emptyset$ .
- 23 Montrer que  $r > 0$  puis séparer  $\{0\}$  de la différence entre l'image réciproque de  $b$  par  $M$  et la boule ouverte pour la norme 1 de centre 0 et de rayon  $r$  via le résultat de la question 8. Montrer que le vecteur  $q$  qui les sépare convient.
- 24 Montrer que  $\bar{x} \in K$ . Pour  $K \subset \mathbb{C}$ , prendre  $y \in K$  et montrer que  $\|y\|_1 \leq r$  en utilisant la définition de  $q$ .
- 25 Trouver  $\lambda$  et  $\mu$  des réels strictement positifs tels que  $y - \mu h \in K$  et  $y + \lambda h \in K$ , puis utiliser la définition de point extrémal pour conclure.
- 26 Montrer par l'absurde que  $\dim(\text{Ker } M) \leq \text{Card}(I_0(y))$ . Pour cela, construire un  $h$  bien choisi vérifiant les hypothèses de la question 25. Utiliser enfin le théorème du rang.

## I. PROJECTION ET SÉPARATION

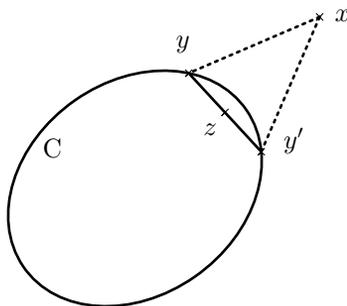
**1** On considère l'ensemble  $\{\|x - z\|^2 \mid z \in C\}$ . C'est une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et minorée par 0 : elle admet une borne inférieure que l'on note  $r \geq 0$  dans la suite. Le but de cette question est de montrer que  $r$  est atteinte en un unique  $y \in C$ . On donne une représentation en dimension 2.



- Unicité : On suppose qu'il existe  $y$  et  $y'$  dans  $C$  tels que

$$\|x - y\|^2 = \|x - y'\|^2 = r$$

Dans ce cas,  $y$  et  $y'$  sont tous deux sur la sphère de centre  $x$  et de rayon  $\sqrt{r}$ . On pose  $z$  le milieu de  $[y; y']$ . Par convexité de  $C$ , le segment  $[y; y']$  est inclus dans  $C$ . A fortiori,  $z \in C$ . En dimension 2, on aurait une situation comme sur cette figure.



La définition de  $r$  assure que  $\|x - z\|^2 \geq r$ . Mais, par inégalité triangulaire et par positive-homogénéité de la norme

$$\|x - z\| = \left\| \frac{1}{2}(x - y) + \frac{1}{2}(x - y') \right\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\| + \frac{1}{2}\|x - y'\| = \sqrt{r}$$

Ainsi

$$\|x - z\|^2 = r$$

On est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire. Cela impose que les vecteurs  $x - y$  et  $x - y'$  sont positivement liés. Comme de plus ils ont la même norme  $\sqrt{r}$ , il vient que  $x - y = x - y'$ , ce qui implique  $y = y'$ . Ceci assure, sous réserve d'existence, l'unicité d'un  $y \in C$  pour lequel  $r$  est atteinte.

Voici une autre méthode pour prouver l'unicité. Elle se fonde sur l'égalité du parallélogramme qui n'est explicitement au programme ni de MPSI ni de PCSI mais qui est néanmoins très classique. On pose tou-

## X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2022 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Aufort (professeur en CPGE) ; il a été relu par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

---

Ce sujet s'intéresse au remplissage d'une grotte lors d'une inondation. Plus précisément, étant donné une grotte et une source d'eau de débit constant, on souhaite déterminer la hauteur d'eau en tout point de la grotte à un instant donné. Le sujet est de difficulté globalement croissante et doit être abordé dans l'ordre, chaque partie reposant sur les notions précédemment introduites.

- Dans la première partie, on modélise une grotte par une liste de déplacements verticaux et horizontaux décrivant le profil de la grotte. Il s'agit principalement d'écrire des fonctions permettant de vérifier qu'une suite de déplacements correspond à des profils de grottes valides. Les questions de cette partie sont plutôt abordables.
- La deuxième partie s'intéresse au cas particulier du remplissage d'une vallée, qui est un type particulier de grotte dans lequel la source est située au fond de la vallée. Il apparaît notamment qu'en décomposant la vallée en rectangles de moins en moins profonds, on peut écrire un programme qui évalue la hauteur d'eau à tout instant. Cette partie comporte trois questions permettant d'y parvenir ; l'une d'elles est particulièrement délicate.
- Enfin, la partie III traite le cas plus général d'une grotte dite à ciel ouvert. On commence comme précédemment par décomposer la grotte en rectangles, mais cette fois ceux-ci sont liés par une structure arborescente longuement détaillée (trois pages d'énoncé!). Une fois cette structure arborescente déterminée, on peut en déduire l'ordre de remplissage des différents rectangles puis la hauteur d'eau dans chacun d'eux. Deux sous-parties s'intéressent respectivement au cas d'une source positionnée à l'entrée gauche de la grotte, et au cas - beaucoup plus difficile - d'une source arbitrairement positionnée.

Comme très souvent au concours X/ENS, nous avons affaire ici à un sujet exclusivement algorithmique, très bien écrit et détaillé. Il propose l'étude d'un problème intéressant (et même amusant), donnant lieu à l'implémentation d'algorithmes élaborés et à l'étude de leurs complexités. Certaines questions peuvent être traitées de façon simple et élégante en utilisant la récursivité ; il vaut donc mieux aborder ce sujet en deuxième année. Même s'il ne comporte que 15 questions, aucun des codes demandés ne contient moins de 5 lignes, et certains sont particulièrement longs et/ou difficiles. Il s'agit donc d'un bon sujet pour s'entraîner à écrire rapidement du code correct.

## INDICATIONS

### Partie I

- 1 Pour repérer les rebroussements, utiliser une boucle où chaque tour examine deux pas successifs dans la liste.
- 2 Dans une vallée, on doit d'abord trouver tous les déplacements B, et ensuite tous les déplacements H. On peut distinguer les deux phases en mettant à jour une variable lorsque l'on rencontre un déplacement H.
- 4 Appliquer la fonction `voisin` sur le dernier point ajouté dans la liste à renvoyer et le pas actuellement examiné.
- 5 Commencer par écrire une fonction testant si un élément est présent dans une liste donnée. L'utiliser ensuite pour repérer les points en double.

### Partie II

- 6 Remarquer qu'il s'agit d'implémenter un algorithme de recherche de maximum dans une liste. Attention à bien renvoyer le point d'abscisse minimale parmi les plus profonds de la vallée.
- 7 Utiliser trois variables contenant la profondeur et les abscisses extrémales du plateau, et les mettre à jour en fonction du déplacement traité.
- 8 Question difficile de programmation. Commencer par repérer l'indice du fond de la vallée, puis parcourir les portions montante et descendante selon les profondeurs décroissantes en adaptant l'algorithme de fusion de deux listes triées. Mettre à jour les caractéristiques des rectangles à construire en fonction des profondeurs des deux plateaux comparés.
- 9 Parcourir les rectangles décomposant le volume intérieur de la vallée et les remplir entièrement du plus profond au moins profond tant que c'est possible. Attention à bien gérer le dernier rectangle partiellement rempli.

### Partie III

- 10 Cette question est en apparence difficile, mais il s'agit uniquement de suivre à la lettre l'algorithme donné dans l'énoncé et de le traduire en Python. Introduire une variable supplémentaire correspondant au numéro du rectangle actuellement ouvert.
- 11 Remarquer que le remplissage d'un père ne peut se faire qu'après le remplissage de chacun de ses enfants, lesquels se remplissent de gauche à droite. En déduire une implémentation utilisant une fonction auxiliaire récursive `remplir(rect)` ajoutant, dans une liste définie au préalable, les numéros des rectangles.
- 12 Adapter le programme de la question 9 à l'ordre renvoyé par la fonction précédente.
- 14 Reprendre le principe de l'exploration récursive de la hiérarchie utilisé à la question 11.
- 15 On pourra commencer par traiter quelques cas particuliers, notamment les cas où l'eau ne remonte pas au dessus de la source, et celui où tous les rectangles ont une hauteur non nulle. En dehors de ces cas, l'un des rectangles ancêtres de la source sera partiellement rempli : détailler alors l'ordre de remplissage de ses enfants.

## I. VALIDITÉ D'UN PROFIL

**1** Suivons la définition d'un profil sans rebroussement donnée par l'énoncé. On commence par vérifier que le profil de la grotte ne commence pas par H et ne se termine pas par B. On utilise ensuite une boucle permettant de vérifier que deux pas consécutifs ne correspondent jamais à des déplacements contraires.

```
def est_sans_rebroussement(g):
    if g[0] == H or g[-1] == B:
        return False
    for i in range(len(g)-1):
        if (g[i],g[i+1]) == (G,D) or (g[i],g[i+1]) == (D,G):
            return False
        if (g[i],g[i+1]) == (H,B) or (g[i],g[i+1]) == (B,H):
            return False
    return True
```

On a choisi dans le code précédent d'écrire les quatre conditions à examiner à l'aide de deux tests pour plus de lisibilité. On aurait pu compacter ces deux tests en un seul test d'appartenance à la liste des couples de positions contraires, en utilisant l'opérateur `in` de Python. La boucle obtenue aurait alors été la suivante

```
for i in range(len(g)-1):
    if (g[i], g[i+1]) in [(G,D), (D,G), (H,B), (B,H)]:
        return False
```

Il est cependant difficile de savoir à la lecture du sujet si la syntaxe « `if x in L` » était autorisée mais il est également possible de reprogrammer rapidement une fonction réalisant ce test et de l'utiliser dans la suite du problème. C'est ce que nous ferons à la question 5, où il sera plus difficile de n'utiliser que les manipulations élémentaires de listes autorisées.

Remarquons enfin que le premier test effectué nécessite que la liste `g` soit non vide. Il est toutefois inutile de gérer le cas de la liste vide à part, car l'énoncé précise que les profils considérés contiennent toujours au moins un pas vers la droite, ils sont donc en particulier non vides.

**2** La fonction commence par contrôler que le profil considéré est sans rebroussement à l'aide de la fonction précédente. Il reste à vérifier que le profil ne contient pas de déplacement gauche, et que tous les déplacements vers le haut sont situés après tous les déplacements vers le bas dans la liste. Pour vérifier cette seconde contrainte, on utilise une variable `direction` qui contiendra H dès que l'on aura rencontré un premier H : toutes les directions verticales suivantes devront alors être des H également.

```
def est_une_vallee(g):
    if not est_sans_rebroussement(g):
        return False
    direction = B
    for pas in g:
        if pas == G or (direction == H and pas == B):
            return False
        if pas == H:
            direction = H
    return True
```

Le profil d'une vallée n'est pas obligé de contenir au moins un déplacement vers le haut. Ceci peut paraître étonnant au premier abord (comment une telle grotte pourrait se remplir?), mais l'énoncé précise que le profil de la grotte est implicitement prolongée par des murs verticaux infinis à gauche et à droite.

- 3** Une disjonction de cas permet de trouver les coordonnées du voisin à renvoyer.

```
def voisin(x, y, d):
    if d == G:
        return (x-1, y)
    if d == D:
        return (x+1, y)
    if d == B:
        return (x, y+1)
    else:
        return (x, y-1)
```

- 4** On initialise la liste des coordonnées à renvoyer avec l'origine du profil, puis pour chaque déplacement de la liste `g`, on ajoute les coordonnées du point obtenu en utilisant la fonction `voisin` appliquée au dernier point enregistré.

```
def liste_des_points(g):
    coords = [(0, 0)]
    for pas in g:
        x, y = coords[len(coords)-1]
        coords.append(voisin(x, y, pas))
    return coords
```

- 5** Un profil décrit par une liste `g` est simple si et seulement si la liste générée par l'appel `liste_des_points(g)` ne contient aucun doublon. Pour vérifier cette condition, on peut reprendre le code de la fonction `liste_des_points` en vérifiant avant chaque insertion d'un point que celui-ci n'est pas déjà présent dans la liste. Pour cela, on programme au préalable une fonction `appartient` réalisant un tel test d'appartenance.

```
def appartient(elt, L):
    for x in L:
        if elt == x:
            return True
    return False
```

Dans le doute, il ne faut pas hésiter à définir rapidement une fonction plutôt qu'utiliser le raccourci « `if .. in ..` » qui n'est pas explicitement autorisé.

```
def est_simple(g):
    coords = [(0, 0)]
    for pas in g:
        x, y = coords[-1]
        suivant = voisin(x, y, pas)
        if appartient(suivant, coords):
            return False
        else:
            coords.append(suivant)
    return True
```