PC
Mathématiques · Informatique
2023

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (de Lyon)

Florian Metzger
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile Andreani
ENS Ulm

Hicham Assakaf
ENS Paris-Saclay

William Aufort
professeur en CPGE

Pierre Bosch
professeur en CPGE

Pascal Delahaye
professeur en CPGE

Nawzad Hogan
ENS de Lyon

David Michel
professeur en CPGE

Angèle Niclas
ENS de Lyon

Tristan Poullaouec
professeur en CPGE

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2023 **PC8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

e3a Mathématiques PC 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Angèle Niclas (ENS de Lyon) ; il a été relu par Pierrick Le Vourc'h (ENS de Lyon) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants d'analyse et d'algèbre.

- Le premier exercice porte sur la diagonalisation des endomorphismes u satisfaisant la relation
$$u^2 - 3u + 2\,\mathrm{id}_{\mathrm{E}} = 0$$
Plus précisément, l'exercice investigue un procédé théorique de diagonalisation de ces endomorphismes inspiré du lemme des noyaux, et le met en place sur un exemple en dimension 3. Cette partie de l'exercice requiert des connaissances solides sur les fondements de l'algèbre linéaire et sur la réduction des endomorphismes.
- Le deuxième exercice a pour but de trouver un équivalent quand n tend vers l'infini de la somme de la série de terme général a_k définie pour tout $n \geqslant 2$ par
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$$
Après deux questions de cours, l'exercice étudie la convergence de différentes séries et intégrales avant d'obtenir l'équivalent recherché par comparaison entre séries et intégrales. Les questions de cet exercice sont très interdépendantes. Elles font appel aux connaissances sur les séries entières et sur l'intégration.
- L'exercice 3 a pour objectif de prouver le résultat de cours qui affirme que toute symétrie orthogonale ψ par rapport à une droite vectorielle peut s'écrire sous la forme φ_u où
$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad \varphi_u(x) = 2\frac{\langle x \mid u\rangle}{\langle u \mid u\rangle}u - x$$
Cet exercice permet de tester ses connaissances sur les projections et symétries orthogonales des espaces vectoriels euclidiens, d'abord quelconques, puis de dimension 3.
- Le dernier exercice, assez technique, propose d'étudier certaines propriétés de la fonction
$$\mathrm{I}_n(x) = \int_0^1 \left(1 - t^2\right)^{n-1} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$$
Cet exercice permet de travailler les intégrations par parties, les changements de variable, mais aussi les théorèmes de dérivation des intégrales à paramètre et d'intégration des sommes de séries de fonctions sur un segment.

Ce sujet très proche du cours et bien guidé aborde un grand nombre de chapitres du programme des deux années de prépa. Il permet à la fois de travailler un chapitre pendant l'année, pour tester ses connaissances et son savoir-faire, et de réviser le programme à l'approche des concours.

SESSION 2023 **PC1M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

CCINP Maths PC 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pascal Delahaye (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean Starynkévitch (professeur en CPGE) et Simon Billouet (professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de trois exercices indépendants.

- L'exercice I traite des endomorphismes cycliques u d'un espace vectoriel E de dimension finie, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe une base de E de la forme $(v, u(v), ...u^{n-1}(v))$. Il est composé de quatre parties indépendantes, dont les trois premières illustrent, chacune, la notion d'endomorphisme cyclique à l'aide d'un exemple. La quatrième partie caractérise, parmi les endomorphismes diagonalisables, ceux qui sont cycliques.

- L'exercice II couvre une grande partie du programme d'analyse. Il propose d'étudier la fonction dilogarithme, initialement définie sur $]-\infty\,;1]$ par la formule
$$\mathrm{L}(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\,t} - x}$$
Après une incontournable étude de régularité proposée en partie I, la partie II permet d'en déterminer un développement en série entière. Ce développement est utilisé en dernière partie pour obtenir une équation fonctionnelle qui sera finalement appliquée à un calcul d'intégrale.

- L'exercice III est dédié aux probabilités. Il propose d'étudier le temps mis par une marche aléatoire unidimensionnelle pour dépasser un certain point A. On vérifie d'abord que ce point est atteint presque sûrement, puis on étudie la variable aléatoire renvoyant le nombre de pas nécessaires pour dépasser ce point.

Ce sujet présente l'avantage d'être composé d'exercices indépendants portant sur des parties disjointes du programme. Il est donc tout à fait possible d'en choisir un passage pour travailler ou réviser un chapitre particulier, y compris avant les révisions de fin d'année. Il est très guidé et comporte des questions de difficultés raisonnables et variées et ne comporte aucune question bloquante. Il est bien adapté à la préparation du concours CCINP.

SESSION 2023

PC5IN

ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

INFORMATIQUE

Durée : 3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties.

L'épreuve est à traiter en langage **Python** sauf pour les bases de données.

Les différents algorithmes doivent être rendus dans leur forme définitive sur le Document Réponse dans l'espace réservé à cet effet en respectant les éléments de syntaxe du langage (les brouillons ne sont pas acceptés).

La réponse ne doit pas se limiter à la rédaction de l'algorithme sans explication, les programmes doivent être expliqués et commentés.

Énoncé et Annexe : 16 pages
Document Réponse (DR) : 12 pages

Seul le Document Réponse doit être rendu dans son intégralité.

CCINP Informatique PC 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet aborde la reconnaissance optique de caractères, dans sa version classique (algorithmique), telle qu'elle était pratiquée avant l'ère des réseaux de neurones.

- La courte partie I constitue un bon avant-goût du sujet puisqu'elle consiste en quelques rappels sur l'encodage binaire des nombres entiers, en l'analyse de complexité d'une fonction donnée par l'énoncé et en la programmation d'une fonction de segmentation sur la base d'une spécification.
- La partie II, la plus longue des trois, traite d'abord de la rotation d'une image au moyen d'une interpolation bilinéaire, de la détection des lignes, puis de la segmentation des caractères. La détection des lignes de texte utilise un algorithme de maximisation d'une fonction unimodale, alors que la segmentation utilise un algorithme de restauration d'image reposant sur le calcul d'une coupe minimale dans un graphe encodant l'image, au moyen de l'algorithme d'Edmonds–Karp. On demande d'exécuter manuellement cet algorithme, mais pas de l'implémenter, ni de prouver sa convergence.
- La partie III regroupe trois questions classiques de bases de données et quelques autres questions de programmation qui traitent du choix d'un symbole pour chaque caractère segmenté.

Ce sujet est original et bien construit, mais s'avère vague ou imprécis par endroits. L'algorithme d'Edmonds–Karp présenté l'est peut-être un peu trop brièvement pour permettre à des élèves en tronc commun d'appréhender son fonctionnement. Alors que les questions de programmation sont relativement faciles puisque les fonctions les plus difficiles sont pré-remplies, on peut se demander combien d'élèves auront vraiment compris l'intérêt de cette méthode dans la segmentation des caractères, ce qui fait l'objet d'une question. Enfin, l'usage d'un document-réponse pour cette épreuve n'était peut-être pas la meilleure idée. En effet, les espaces laissés pour les réponses, souvent trop courts, ne permettaient jamais d'expliquer le code ou d'ajouter des commentaires, ce qui amène à se demander comment il était possible de suivre les instructions de l'énoncé qui demandait d'éviter le code nu. Lors de l'épreuve, il fallait donc non seulement écrire petit, mais aussi commencer par répondre à la question au brouillon, afin d'éviter de raturer. Le formulaire numpy est également manquant. C'est néanmoins un bon sujet de révision, car représentatif des sujets de concours en informatique tronc commun et présentant un algorithme de graphe élégant qui est normalement au programme de licence en informatique.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

PC

2023

4 heures Calculatrice autorisée

L'objectif de ce sujet est d'établir le théorème de Perron-Frobenius pour une certaine classe de matrices symétriques. Ce théorème étudie les espaces propres d'une matrice associés aux valeurs propres de module maximal. Une application, en conclusion, montre une ouverture à l'analyse spectrale des matrices à coefficients positifs.

— La partie I permet d'obtenir des résultats préliminaires, utiles pour les parties suivantes.

— La partie II examine, à titre d'exemple, le cas des matrices à coefficients strictement positifs de taille deux.

— La partie III s'intéresse au lien entre le rayon spectral d'une matrice et le comportement asymptotique de la suite de ses puissances successives ; elle est indépendante de la partie II.

— La partie IV donne une démonstration du théorème pour une classe de matrices symétriques à coefficients positifs ; elle est indépendante des parties II et III.

Notations et définitions

$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

— On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

— Si $A = (A_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $|A|$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $|A_{ij}|$ ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$).

— Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). La notation $A \geqslant 0$ (respectivement $A > 0$) signifie que la matrice A est positive (respectivement strictement positive).

— Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $A \geqslant B$ (respectivement $A > B$) signifie que la matrice $A - B$ est positive (respectivement strictement positive). De même, la notation $A \leqslant B$ (respectivement $A < B$) signifie que la matrice $B - A$ est positive (respectivement strictement positive).

— Les propriétés suivantes pourront être librement utilisées (sous réserve que les opérations correspondantes puissent être envisagées) :

- $|A + B| \leqslant |A| + |B|$;
- $|A^\top| = |A|^\top$;
- si $\gamma \in \mathbb{K}$, alors $|\gamma A| = |\gamma||A|$;
- si $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, alors $AB \geqslant 0$.

— On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini, pour tous vecteurs X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par

$$(X \mid Y) = X^\top Y = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

La norme euclidienne (associée à ce produit scalaire) du vecteur X est alors donnée par

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X} = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\right)^{1/2}.$$

— Le spectre d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{sp}(A)$.

— Le rayon spectral d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

— On dit qu'une norme $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est sous-multiplicative si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

Centrale Maths 1 PC 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hicham Assakaf (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Ce sujet parcourt de nombreux résultats incontournables, notamment en algèbre linéaire numérique. On étudie le lien entre le comportement asymptotique des puissances d'une matrice et son rayon spectral, et on prouve le théorème de Perron-Frobenius pour certaines classes de matrices symétriques. Ce théorème donne des informations sur les sous-espaces propres d'une matrice associés aux valeurs propres de module maximal.

- La partie I montre quelques résultats qui serviront dans la suite du sujet et permet de se familiariser avec les calculs mettant en jeu les valeurs absolues de matrices.
- La deuxième partie étudie les matrices strictement positives de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et détermine une condition nécessaire et suffisante sur une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ pour que la suite $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice non nulle.
- La troisième partie introduit dans un premier temps des normes matricielles et prouve quelques résultats élémentaires sur le rayon spectral. Elle établit dans un second temps un lien entre les normes matricielles et le rayon spectral. La fin de cette partie utilise ces résultats pour montrer que pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, la suite de matrices $(\mathrm{A}^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si, et seulement si, $\rho(\mathrm{A}) < 1$.
- La dernière partie se consacre à la preuve du théorème de Perron-Frobenius pour plusieurs classes de matrices symétriques. Tout d'abord, on établit que le rayon spectral d'une matrice symétrique positive est une valeur propre de cette matrice. Ensuite, on prouve le théorème en se restreignant aux matrices symétriques strictement positives et on montre qu'il ne s'applique pas pour les matrices symétriques positives en général. Puis cette partie démontre que le théorème s'applique aux matrices symétriques positives dont une des puissances est strictement positive. Enfin, on se sert des résultats précédents pour prouver un théorème de Ky Fan.

Ce problème est centré sur le programme d'algèbre linéaire de PC. Il aborde de nombreux points très classiques (norme matricielle, rayon spectral). On y trouve des raisonnements récurrents qu'il est bon d'avoir vus au moins une fois. Ce sujet fournit de nombreuses indications et est adapté à la révision du programme d'algèbre linéaire de deuxième année.

Mathématiques 2

PC

2023

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Notations

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficient réels.

$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.

Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On a $\dbinom{0}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

$[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre a et b. Ainsi, $[\![a,b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leqslant n \leqslant b\}$.

I Utilisation de séries entières

I.A – Une première formule

Q 1. Donner sans démonstration le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

Q 2. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$.

Q 3. Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et que, pour tout $x \in \,]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \tag{I.1}$$

I.B – Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

Q 4. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est définie sur $]-1,1[$.

Q 5. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(H_0, \dots, H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

Q 6. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

Q 7. Pour tout couple $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant j \leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

Q 8. Écrire une fonction Python `alpha` qui prend un couple d'entiers (k,j) en paramètre et qui renvoie la valeur de $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction `binome` telle que `binome(n, k)` renvoie le coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$.

Centrale Maths 2 PC 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nawzad Hogan (ENS de Lyon) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS de Lyon) et Florian Metzger (professeur en CPGE).

Le sujet commence par l'étude d'une famille de séries entières, puis introduit des notions sur les sommes doubles, et finit en présentant une application de ces outils aux probabilités.

- Dans la partie I, on étudie des séries entières classiques avant de s'intéresser aux séries entières de la forme $f_k(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} n^k x^n$ avec $k \in \mathbb{N}$. On établit que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists ! \mathrm{P}_k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \quad \forall x \in \left] -1\,;1 \right[\qquad f_k(x) = \frac{\mathrm{P}_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

  puis on étudie brièvement les polynômes P_k (degré, coefficient constant, coefficient dominant, etc). Dans la suite, on établit deux formules qui seront utilisées dans la partie III.
- La partie II étudie des sommes doubles, notion à la limite du programme de mathématiques de la filière PC. L'énoncé rappelle deux résultats qui seront utilisés dans la quasi-totalité des questions de cette partie. Cette dernière est consacrée à l'étude de quatre exemples de sommes doubles, en donnant deux exemples où les sommes permutent et deux contre-exemples. Elle est peu liée au reste du sujet et à dû déstabiliser plus d'un candidat lors de l'épreuve, étant donné qu'il fallait manipuler les sommes doubles avec précaution.
- Dans la partie III, on étudie d'abord une variable aléatoire dont on établit la loi, qui fait intervenir la série entière f_k introduite dans la partie I, puis on calcule son espérance et sa variance. Cette partie, certes peu riche théoriquement, demande une grande rigueur dans les calculs. Enfin, dans la fin de cette partie, on applique les formules établies dans la partie I à l'expérience aléatoire du jeu de pile ou face infini.

Le sujet est centré sur les séries entières et les probabilités, mais utilise aussi les polynômes et les séries numériques. Les points de cours utilisés ne sont pas nombreux, mais il faut être rigoureux dans leur utilisation. La longueur est conséquente, comme souvent à la banque Centrale. La difficulté de ce sujet consiste à tenir compte de sa longueur, donc d'aller vite, tout en restant rigoureux dans les calculs, qui sont très nombreux et souvent délicats. La première partie, assez classique, devait être traitée rapidement. Même si la partie II n'est pas vraiment dans l'esprit du programme de la filière PC, elle peut être intéressante pour toutes les filières afin de consolider des bases fragiles sur la sommabilité. La dernière partie est excellents pour réviser les probabilités, et ce quelle que soit la filière.

A2023 – MATH I PC

Concours commun
Mines-Ponts

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Maths 1 PC 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) ; il a été relu par Loïc Jean (ENS de Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce problème est constitué de cinq parties pouvant être traitées indépendamment les unes des autres puisque les résultats indispensables sont donnés dans l'énoncé. Elles sont toutefois fortement liées (surtout les deux dernières), dans le sens où les mêmes idées reviennent à plusieurs reprises.

- Dans la partie I, on établit quelques résultats préliminaires sur les matrices symétriques positives (resp. définies positives) et sur les fonctions convexes.
- La deuxième partie démontre une première inégalité de convexité portant sur les traces et les déterminants des matrices symétriques positives.
- On prouve dans la partie suivante que $\ln \circ \det$ est une application concave sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives, en partant d'une sorte de diagonalisation simultanée de deux matrices symétriques.
- La quatrième partie sert de préambule à la dernière : on se fait d'abord la main sur l'application $g : t \mapsto \det(\mathrm{I}_n + t\mathrm{A})$ avant de passer, dans la partie V, à l'application $f_{\mathrm{A}} : t \mapsto \det(\mathrm{A}+t\mathrm{M})$, dont on étudie la régularité avant d'établir une belle inégalité reliant une fois de plus déterminants et traces de matrices symétriques.

La difficulté des questions augmente progressivement au fil du problème et les mêmes idées reviennent fréquemment, si bien qu'il valait mieux traiter les questions dans l'ordre et éviter de papillonner. D'ailleurs, dans ce problème, il était difficile d'avancer après avoir sauté une question.

Comme l'auteur de l'énoncé l'a insinué fort subtilement, ce sujet traite avant tout de convexité et il vaut mieux ne pas être allergique aux manipulations d'inégalités pour l'aborder. Les relations de convexité vont servir à établir des relations entre les déterminants et les traces de matrices symétriques, et on recourra pour cela au théorème spectral. Au final, le problème fait appel à peu de notions du programme de prépa :

- La définition de la convexité étant rappelée par l'énoncé, il faut juste savoir caractériser la convexité d'une fonction numérique à l'aide de sa dérivée seconde.
- Il faut bien entendu maîtriser le théorème spectral et savoir exprimer la trace et le déterminant d'une matrice symétrique à l'aide de ses valeurs propres.

Pour le reste, il suffit d'apprivoiser les notations et concepts exposés dans l'énoncé pour répondre proprement aux questions. La difficulté de celles-ci est raisonnable, mais comme l'épreuve ne dure que trois heures, il fallait rester concentré et productif pour traiter le sujet en entier.

A2023 – MATH II PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Maths 2 PC 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par David Michel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Quentin Vermande (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet traite des chaînes de Markov en temps continu et a pour objectif d'étudier le comportement asymptotique d'un tel système.

- Dans une partie préliminaire, on démontre des propriétés algébriques élémentaires sur ce que l'énoncé appelle un noyau de Markov, et qui coïncide avec la notion nettement plus répandue de matrice stochastique (c'est-à-dire des matrices à coefficients positifs dont la somme sur une ligne vaut toujours 1). On justifie la stabilité de l'ensemble de ces matrices par produit et, modulo une petite normalisation, par passage à l'exponentielle de matrices.
- La première partie propose à titre d'exemple deux modèles probabilistes faisant intervenir les noyaux de Markov, le premier discret, le second continu.
- On étudie dans la deuxième partie la réduction d'un endomorphisme autoadjoint et on démontre une inégalité portant sur une forme quadratique associée. Cette partie est indépendante de tout ce qui précède.
- Enfin, la troisième partie, plus longue, est consacrée à l'étude de la convergence d'un processus de Markov continu réversible sous l'hypothèse de simplicité de la valeur propre 1 pour le générateur du processus. On définit pour cela un produit scalaire adapté et en considérant la projection orthogonale sur l'espace propre associé à la valeur propre 1, on obtient des inégalités justifiant la convergence du processus de Markov continu.

En dépit du titre du problème, la théorie des probabilités n'intervient que dans trois questions. L'essentiel du travail consiste en l'application de résultats relatifs aux espaces euclidiens et aux projections orthogonales. Deux questions font appel au calcul différentiel.

A2023 – INFO

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE COMMUNE

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Cette épreuve est commune aux candidats des filières MP, PC et PSI.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

INFORMATIQUE COMMUNE

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Cette épreuve traite de typographie, c'est-à-dire de la façon de former des caractères et de les agencer pour former un texte lisible. Elle utilise des termes techniques précis comme « glyphe », « œil » ou « chasse » et aborde plusieurs problèmes liés à cette thématique, du traitement individuel des caractères à l'agencement global des mots dans les textes justifiés.

- La partie I, très courte et essentiellement descriptive, permet de comprendre comment sont définis les glyphes (représentations graphiques des caractères) qui seront manipulés dans la suite du sujet.
- La partie II, très courte elle aussi, est constituée de trois questions sur les bases de données dont le but est de sélectionner des polices et des caractères.
- Dans la partie III, on écrit des fonctions en Python permettant de manipuler les descriptions vectorielles des glyphes.
- La partie IV introduit une bibliothèque Python de traitement d'image et aborde le problème du tracé des lignes sur une image pixelisée. Il est notamment demandé d'expliquer, sur un exemple, un code donné dans l'énoncé.
- La partie V poursuit le travail de la partie précédente en guidant l'écriture du code nécessaire à l'affichage complet des caractères et des mots au sein d'une image.
- Enfin, la dernière partie aborde un sujet différent, celui de l'agencement des mots et des espaces permettant d'obtenir un texte justifié sur plusieurs lignes. Bien que les codes correspondant aux algorithmes les plus complexes soient fournis, elle est plus difficile et fait intervenir des notions d'algorithmique : principe des algorithmes gloutons, programmation dynamique, mémoïsation, calcul de complexité.

En dépit d'une quantité importante de mots et de concepts initialement inconnus de la majorité des candidats, ce sujet est suffisamment progressif pour être accessible à tout élève motivé. Il balaye de façon efficace une grande partie du programme des deux années. Les élèves de sup pourront néanmoins s'entraîner en laissant de côté les parties II et VI. Enfin, il est appréciable qu'un sujet dise aux futurs ingénieurs, chercheurs ou professeurs que la beauté compte dans leurs futurs métiers. C'est pourquoi la très grande majorité des documents scientifiques sont produits à l'aide de logiciels qui accordent une grande importance à la typographie, ce qui n'est pas le cas de logiciels plus classiques... Chez H&K, nous mettons un point d'honneur à ce que nos livres soient agréables à lire, et toutes nos publications utilisent bien sûr LaTeX dans les règles de l'art !

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2023

LUNDI 17 AVRIL 2023
08h00 - 12h00

FILIERE PC - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES (XEULS)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Maths PC 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierre Bosch (professeur en CPGE) ; il a été relu par Pascal Delahaye (professeur en CPGE) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

Ce problème aborde des modèles matriciels issus du domaine scientifique appelé dynamique des populations. Celles-ci sont réparties en $d \in \mathbb{N}^*$ types selon par exemple la couleur de leurs yeux, leur taille, leur localisation géographique, leur âge, etc. À chaque étape, les individus ont un nombre aléatoire d'enfants pouvant être de différents types. On s'intéresse à l'évolution du nombre total d'individus au cours du temps.

Ce sujet comporte quatre parties liées. Les deux premières font intervenir de l'algèbre linéaire et des espaces vectoriels normés afin d'obtenir des résultats qui sont utilisés dans les deux parties suivantes axées autour des probabilités.

- Dans la partie I, on s'intéresse à quelques propriétés d'une matrice carrée $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R}_+)$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1\,; d]\!] \qquad \sum_{j=1}^{d} \mathrm{P}_{i,j} = 1$$

  Dans la littérature, une telle matrice est dite stochastique et apparaît naturellement comme matrice de transition dans l'étude d'une chaîne de Markov à d états. On définit l'ensemble $\mathscr{P}$ des vecteurs lignes de taille d à coefficients positifs dont la somme des coordonnées vaut 1 et l'on montre que s'il existe $\nu \in \mathscr{P}$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,; d]\!]^2 \qquad \mathrm{P}_{i,j} \geqslant c\,\nu_j$$

  alors il existe un unique $\mu \in \mathscr{P}$ tel que $\mu\mathrm{P} = \mu$. On parle alors de mesure invariante par P. On y parvient avec du calcul matriciel et du calcul dans des espaces vectoriels normés. Le sujet aborde le problème classique de la convergence d'une suite vectorielle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation du type $x_{n+1} = f(x_n)$.
- Dans la deuxième partie, on démontre des résultats généraux du même type que ceux de la partie précédente. On passe ensuite à l'étude d'une matrice donnée. Même si ce n'est pas abordé, cette matrice permet d'étudier l'évolution d'une population structurée en d classes d'âge. À chaque instant, les individus vieillissent en passant de la classe i à la classe $i+1$, meurent ou donnent naissance à des individus appartenant à la première classe d'âge.
- Les probabilités apparaissent dans la troisième partie. On y étudie des vecteurs aléatoires. Les notations sont assez compliquées et il semble manquer quelques hypothèses nécessaires à la bonne résolution des questions.
- La dernière partie est dans la lignée de la troisième. On y démontre des résultats prédisant l'évolution de la taille de la population, et notamment si elle va s'éteindre.

Ce problème mélange algèbre linéaire, espaces vectoriels normés et probabilités. Il est très long, calculatoire, et il faut par endroits avoir du recul et de l'intuition. Par ailleurs, il y a beaucoup de notations et d'hypothèses à s'approprier. Tout cela en fait un sujet compliqué.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2023

JEUDI 20 AVRIL 2023
16h30 - 18h30

FILIERES MP-PC-PSI
Epreuve n° 8

INFORMATIQUE B (XELSR)

Durée : 2 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Aufort (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet s'intéresse à la gestion de version de longs textes, dont la principale application concerne les codes informatiques. Certains logiciels, comme Git, utilisent des algorithmes permettant à plusieurs développeurs de travailler sur un même programme, puis de fusionner leurs versions si elles ne sont pas en conflit, ou encore de conserver un historique des différentes modifications effectuées. L'idée consiste à ne pas stocker les différentes versions complètes (elles sont en général très volumineuses), mais seulement les différences entre deux versions dans un *différentiel*. La donnée d'une version et d'un différentiel permet de reconstruire le texte modifié.

- La partie I introduit les principales notions et structures de données qui seront utilisées et adaptées dans la suite : tranche, différentiel et texte versionné. Un premier algorithme de calcul de différentiel est implémenté dans le cas simple où les modifications à effectuer concernent des portions de longueurs égales dans les deux textes.
- La partie II s'affranchit de cette hypothèse et adapte les structures de données précédemment mises en place. Un lien est alors établi avec le calcul de la distance d'édition entre deux textes, un grand classique de la programmation dynamique, dont une résolution est proposée. La détection de conflits entre deux différentiels et un algorithme de fusion de modifications sont également implémentés.
- Enfin, la partie III modélise le calcul d'une distance d'édition sous la forme de la recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré associé aux deux textes à comparer. Les algorithmes au programme de prépa pour résoudre ce problème, à savoir l'algorithme de Dijkstra et l'algorithme A^*, sont alors étudiés dans ce cadre, notamment du point de vue de la complexité temporelle.

Comme depuis plusieurs années à l'X, il s'agit d'un sujet exclusivement d'algorithmique, très bien écrit et détaillé. Il est de plus d'une longueur raisonnable, même s'il comporte quelques questions de programmation plus techniques. Au-delà des capacités de programmation et d'assimilation de nouvelles structures de données, ce sujet évaluait les connaissances et la compréhension des candidats sur le paradigme de programmation dynamique et sur les algorithmes de graphes, qui sont deux nouveaux chapitres au programme de prépa. Cela en fait un bon sujet pour retravailler ces deux thèmes.