MARIE-CÉCILE DARRACQ • JEAN-ÉTIENNE ROMBALDI

Probabilités pour la Licence

LICENCES 1 & 2
MATHÉMATIQUES

- Cours complet
- Plus de 100 exercices
- Tous les corrigés détaillés

deboeck SUPÉRIEUR

MARIE-CÉCILE DARRACQ • JEAN-ÉTIENNE ROMBALDI

Probabilités pour la Licence

de boeck SUPÉRIEUR

Des mêmes auteurs

Darracq M.-C., Rombaldi J.-É., *Algèbre et géométrie pour la Licence* (nouveauté 2021)
Darracq M.-C., Rombaldi J.-É., *Analyse pour la Licence*
Darracq M.-C., Rombaldi J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Probabilités* (nouveauté 2021)
Darracq M.-C., Rombaldi J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Algèbre et géométrie* (nouveauté 2021)
Darracq M.-C., Rombaldi J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Analyse*
Rombaldi J.-É., *Mathématiques pour l’agrégation. Algèbre et géométrie* – 2e édition (nouveauté 2021)
Rombaldi J.-É., *Exercices et problèmes corrigés pour l’agrégation de mathématiques*
Rombaldi J.-É., *Leçons d’oral pour l’agrégation de mathématiques. Première épreuve : Les exposés*
Rombaldi J.-É., *Leçons d’oral pour l’agrégation de mathématiques. Seconde épreuve : les exercices*

En couverture : Coupe d’un nautile © AdrianHancu/Getty Images
Maquette intérieure : Hervé Soulard/Nexeme
Mise en pages de l’auteur
Maquette de couverture : Primo&Primo
Couverture : SCM, Toulouse

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2021/13647/103
Bibliothèque nationale, Paris : juin 2021
ISBN : 978-2-8073-3223-2

Sommaire

Table des matières

Avant-propos

Ce volume sur la théorie des probabilités destiné aux étudiants de L2 ou de deuxième année de classes préparatoires aux grandes écoles fait suite au cours d'analyse publié dans la même collection. Il peut être considéré comme une application des chapitres sur les séries et sur l'intégration. Ce livre sera aussi utile aux candidats au Capes et à l'Agrégation interne de mathématiques. Pour les candidats au Capes, un volume comprenant ce cours est complété par une série de problèmes corrigés d'épreuves de capes portant sur les probabilités.

Notre objectif est de présenter de façon rigoureuse les bases de la théorie des probabilités sans référence à la théorie de la mesure, ce qui nous contraint à admettre certains résultats comme le théorème 6.4 sur la densité de probabilité d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité et le théorème 6.15 de la limite centrale.

Le premier chapitre consacré à l'analyse combinatoire nous fournit les outils indispensables dans le cadre simple des probabilités sur un univers fini. La formule intuitive qui nous donne, sous l'hypothèse d'équiprobabilité, une mesure de probabilité comme étant égale au « nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles » nous ramène à des calculs de dénombrement.

Dans un deuxième chapitre, nous présentons l'axiomatique de Kolmogorov où les définitions et théorèmes rencontrés sont ceux que l'on retrouvera en L3 dans un cours de théorie de la mesure et intégration. Il s'agit essentiellement de « raisonnements ensemblistes ». Ce chapitre est naturellement suivi d'un chapitre sur les probabilités conditionnelles.

Pour ces deux chapitres, les applications que nous donnons ne se limitent pas à quelques cas dits concrets de la vie courante. Nous laissons le soin au physicien ou à l'économiste qui a étudié un tel cours de probabilité de donner ces exemples. La « mathématisation » d'une situation concrète dépend de ce qui est attendu par l'utilisateur et n'est pas toujours aisée. Nous donnons quelques applications à la théorie des nombres, ce qui peut faire partie de la vie courante de l'étudiant en mathématiques.

Les derniers chapitres sont consacrés à l'étude des variables aléatoires et à quelques problèmes de convergence (convergence en probabilité, en moyenne et en loi). Ces variables aléatoires sont tout d'abord étudiées dans le cas discret, où la notion d'espérance (ou de moyenne) se définit de manière naturelle. Ce chapitre correspond à ce qui est en général étudié en L2 et en deuxième année de classes préparatoires aux grandes écoles. Dans ce cadre discret, les raisonnements utilisent essentiellement les résultats sur les séries numériques et les séries entières.

Le cadre plus général des variables aléatoires est plus délicat et est présenté avec la seule connaissance de l'intégrale de Riemann sur un segment. L'espérance d'une variable aléatoire à valeurs positives est définie par $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,dt$ en constatant que la fonction $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ qui est décroissante est Riemann-intégrable sur tout segment, ce qui nous suffit. Le chapitre correspondant nécessite plus d'attention du fait de son caractère théorique. En première lecture, l'étudiant pourra en admettre les principaux résultats. Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'étude des variables aléatoires à densité en se concentrant sur les exemples classiques.

De nombreux exercices, classiques et moins classiques, tous corrigés en détail, complètent ce cours.

Pour conclure, nous tenons à remercier les éditions Deboeck et en particulier Alain Luguet pour la confiance qu'ils nous accordent en publiant ce travail.

Chapitre 1

Outils ensemblistes et dénombrements

Les notions de bases sur les ensembles sont supposées acquises.

Pour ce chapitre, Ω est un ensemble non vide et $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de toutes les parties de Ω. Pour tout ensemble non vide F, on note F^{Ω} l'ensemble des applications de Ω dans F. On rappelle que si f est une application de Ω dans F, pour toute partie A de Ω, l'image de A par f est le sous ensemble de F défini par $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ et pour toute partie B de F, l'image réciproque de B par f est le sous ensemble de E défini par $f^{-1}(B) = \{x \in \Omega \mid f(x) \in B\}$.

1.1 Quelques rappels d'analyse combinatoire

Avec ce paragraphe nous rappelons quelques notions d'analyse combinatoire.

Le cardinal d'un ensemble E est le nombre, fini ou infini, de ses éléments. Il est noté $\mathrm{card}(E)$. Deux ensembles ont le même cardinal si, et seulement si, ils sont en bijection.

On dit qu'un ensemble E, fini ou infini, est dénombrable s'il existe une bijection de E sur une partie de $\mathbb{N}$.

Une sous-ensemble d'un ensemble dénombrable, une réunion finie ou infinie dénombrable d'ensembles dénombrables sont dénombrables.

Avec les deux théorèmes qui suivent, on donne les propriétés essentielles du cardinal d'un ensemble fini.

Théorème 1.1.

Soient $E, F, E_1, \cdots, E_n$ des ensembles finis avec $n \geq 2$.

1. *Dans le cas où les E_k sont deux à deux disjoints, on a :*
$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(E_k)$$
2. *Pour toute partie A de E, on a* $\mathrm{card}(E \setminus A) = \mathrm{card}(E) - \mathrm{card}(A)$, *donc* $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(E)$, *l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $A = E$.*
3. *On a* $\mathrm{card}(E \cup F) = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) - \mathrm{card}(E \cap F)$.

4. On a $\operatorname{card}\left(\prod_{k=1}^{n} E_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{card}(E_k)$.

Preuve.

1. Pour $n = 2$, on désigne par n_1 le cardinal de E_1 et par n_2 celui de E_2. On dispose d'une bijection f_1 de E_1 sur $I_{n_1} = \{1, \cdots, n_1\}$ et d'une bijection f_2 de E_2 sur $I_{n_2} = \{1, \cdots, n_2\}$. L'application f définie sur $E_1 \cup E_2$ par :
$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ si } x \in E_1 \\ n_1 + f_2(x) \text{ si } x \in E_2 \end{cases}$$
réalise alors une bijection de $E_1 \cup E_2$ sur $I_{n_1+n_2} = \{1, \cdots, n_1 + n_2\}$. En effet, elle est bien définie puisque E_1 et E_2 sont disjoints et pour tout $k \in I_{n_1+n_2}$, il existe un unique $x \in E_1 \cup E_2$ tel que $k = f(x)$, cet élément étant $x = f_1^{-1}(k)$ si $1 \leq k \leq n_1$ ou $x = f_2^{-1}(k - n_1)$ si $n_1 + 1 \leq k \leq n_1 + n_2$. L'ensemble $E_1 \cup E_2$ est donc fini de cardinal $n_1 + n_2 = \operatorname{card}(E_1) + \operatorname{card}(E_2)$. Supposant le résultat acquis au rang $n - 1 \geq 2$, on a en utilisant le cas $n = 2$ et l'hypothèse de récurrence :
$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right) + \operatorname{card}(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{card}(E_k)$$
2. De la partition $E = A \cup (E \setminus A)$, on déduit que :
$$\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(E \setminus A) \geq \operatorname{card}(A)$$
Supposons que $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(A)$. Si $A \neq E$, il existe alors $x \in E \setminus A$ et de l'inclusion $A \cup \{x\} \subset E$ avec $A \cap \{x\} = \emptyset$, on déduit $\operatorname{card}(A) + 1 \leq \operatorname{card}(E)$, ce qui contredit l'égalité $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(A)$. On a donc $A = E$. La réciproque est évidente.
3. Des partitions $E \cup F = (E \setminus F) \cup F$ et $E = (E \setminus F) \cup (E \cap F)$, on déduit que :
$$\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E \setminus F) + \operatorname{card}(F)$$
et :
$$\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(E \setminus F) + \operatorname{card}(E \cap F)$$
ce qui donne $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F)$.
4. Pour $n = 2$, en notant $E_2 = \{y_1, \cdots, y_{n_2}\}$ et en utilisant la partition :
$$E_1 \times E_2 = \bigcup_{k=1}^{n_2} E_1 \times \{y_k\}$$
avec $\operatorname{card}(E_1 \times \{y_k\}) = \operatorname{card}(E_1)$ ($E_1 \times \{y_k\}$ et E_1 sont en bijection), on obtient :
$$\begin{aligned} \operatorname{card}(E_1 \times E_2) &= \sum_{k=1}^{n_2} \operatorname{card}(E_1 \times \{y_k\}) = \sum_{k=1}^{n_2} \operatorname{card}(E_1) \\ &= n_2 \operatorname{card}(E_1) = \operatorname{card}(E_1) \operatorname{card}(E_2) \end{aligned}$$
Le résultat pour $n \geq 2$ s'en déduit alors facilement par récurrence.

□

Théorème 1.2.

Soient E, F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p, n et φ dans F^E.

1. *On a* $\operatorname{card}\left(F^E\right) = (\operatorname{card}(F))^{\operatorname{card}(E)}$.
2. *Si φ est injective, on a alors* $\operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(F)$.
3. *Pour $n \geq p$, le nombre d'applications injectives de E dans F est* $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
4. *Si φ est surjective, on a alors* $\operatorname{card}(E) \geq \operatorname{card}(F)$.
5. *Si φ est bijective, on a alors* $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$.
6. *Pour $n = p$, le nombre d'applications bijectives de E dans F est $n!$*
7. *On a* $\operatorname{card}(\varphi(E)) \leq \min(\operatorname{card}(E), \operatorname{card}(F))$ *et φ est injective si, et seulement si, on a* $\operatorname{card}(\varphi(E)) = \operatorname{card}(E)$, *$\varphi$ est surjective si, et seulement si, on a* $\operatorname{card}(\varphi(E)) = \operatorname{card}(F)$.
8. *Pour $n = p$, on a :*
$$(\varphi \textit{ injective}) \Leftrightarrow (\varphi \textit{ surjective}) \Leftrightarrow (\varphi \textit{ bijective})$$
9. *S'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $y \in F$, $\varphi^{-1}\{y\}$ est de cardinal r, φ est alors surjective et on a* $\operatorname{card}(E) = r \operatorname{card}(F)$ *(principe des bergers).*

Preuve. On note $E = \{x_1, \cdots, x_p\}$ et $F = \{y_1, \cdots, y_n\}$.

1. L'application $f \mapsto (f(x_k))_{1 \leq k \leq p}$ réalisant une bijection de F^E sur F^p, on en déduit que $\operatorname{card}\left(F^E\right) = \operatorname{card}(F^p) = (\operatorname{card}(F))^p = (\operatorname{card}(F))^{\operatorname{card}(E)}$.
2. Pour φ injective, $\varphi(E) = \{\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_p)\}$ est une partie à p éléments de F, donc $p \leq n$.
3. On procède par récurrence sur $p = \operatorname{card}(E)$ en notant A_n^p le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. Pour $p = 1$, toute application de $\{x_1\}$ dans F est injective, ce qui donne $n = \dfrac{n!}{(n-1)!}$ possibilités. Supposons le résultat acquis au rang $p-1 \geq 1$. Une injection de E dans F étant uniquement déterminée par sa restriction à $E_{p-1} = \{x_1, \cdots, x_{p-1}\}$ qui est une injection de de E_{p-1} dans F et par $\varphi(x_p)$ qui est dans $F \setminus \varphi(E_{p-1})$ de cardinal $n-p+1$, on en déduit que :
$$A_n^p = A_n^{p-1}(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p+1)!}(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$
4. Pour φ surjective, chaque ensemble $\varphi^{-1}\{y_k\}$ est non vide, donc de la partition :
$$E = \varphi^{-1}(F) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{y_k\}\right) = \bigcup_{k=1}^{n}\varphi^{-1}\{y_k\}$$
on déduit que $p \geq n$.
5. Résulte des points 2 et 4.

6. Résulte du point 3.
7. Comme $\varphi(E) \subset F$, on a $\mathrm{card}(\varphi(E)) \leq \mathrm{card}(F)$. En notant $\varphi(E) = \{z_1, \cdots, z_m\}$, où les z_k, pour k compris entre 1 et m sont deux à deux distincts, on a la partition $E = \bigcup_{k=1}^{m} \varphi^{-1}\{z_k\}$ et l'égalité :
$$\mathrm{card}(E) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{card}\left(\varphi^{-1}\{z_k\}\right) \geq m = \mathrm{card}(\varphi(E))$$
car les $\varphi^{-1}\{z_k\}$ sont non vides. Si φ est injective, elle induit alors une bijection de E sur $\varphi(E)$ et on a $\mathrm{card}(\varphi(E)) = \mathrm{card}(E)$. Réciproquement si $p = \mathrm{card}(\varphi(E)) = \mathrm{card}(E)$, les $\varphi^{-1}\{y_k\}$ sont alors tous de cardinal égal à 1, ce qui signifie que tout élément de $\varphi(E)$ a un unique antécédent dans E, donc φ est bijective de E sur $\varphi(E)$ et injective de E dans F. Si φ est surjective, on a alors $\varphi(E) = F$, donc $\mathrm{card}(\varphi(E)) = \mathrm{card}(F)$. Réciproquement si $\mathrm{card}(\varphi(E)) = \mathrm{card}(F)$, on a alors $\varphi(E) = F$ et φ est surjective.
8. Si φ est injective, on a $\mathrm{card}(\varphi(E)) = \mathrm{card}(E) = \mathrm{card}(F)$, donc $\varphi(E) = F$ et φ est surjective. Si φ est surjective, on a $\mathrm{card}(\varphi(E)) = \mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E)$ et φ est injective, donc bijective. Enfin si φ est bijective, elle alors injective. Les trois propositions sont donc bien équivalentes.
9. Si $\varphi^{-1}\{y\}$ est de cardinal $r \geq 1$ pour tout $y \in F$, tous ces ensembles sont non vides et φ est surjective. De la partition $E = \bigcup_{k=1}^{n} \varphi^{-1}\{y_k\}$, on déduit que :
$$\mathrm{card}(E) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}\left(\varphi^{-1}\{y_k\}\right) = nr = r\,\mathrm{card}(F)$$

□

Le point 3 du théorème 1.1 se généralise comme suit.

Théorème 1.3. Formule de Poincaré

Si $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite de parties finies d'un ensemble Ω, on a alors :
$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} p_{k,n}$$
où on a noté $p_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathrm{card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)$ pour $1 \leq k \leq n$.

Preuve. Pour $n = 1$, c'est clair et pour $n = 2$, c'est le point 3 du théorème 1.1. Supposons le résultat acquis pour $n \geq 2$ et soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ une suite de parties finies de Ω. En notant $B = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, le cas $n = 2$, nous donne :
$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \mathrm{card}(A_{n+1}) + \mathrm{card}(B) - \mathrm{card}(A_{n+1} \cap B)$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathrm{card}\,(B) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\,(A_{n+1}) + \mathrm{card}\,(B) &= \sum_{i_1=1}^{n+1} \mathrm{card}\,(A_{i_1}) \\ &+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\,(A_{n+1} \cap B) &= \mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} \mathrm{card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_{n+1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j < i_{j+1} = n+1} \mathrm{card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}}\right)\end{aligned}$$

Le changement d'indice $k = j + 1$ dans cette dernière somme nous donne :

$$\mathrm{card}\,(A_{n+1} \cap B) = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mathrm{card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \sum_{i_1=1}^{n+1} \mathrm{card}\,(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k < n+1} \mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &+ \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{k-1} < i_k = n+1} \mathrm{card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1} \mathrm{card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\end{aligned}$$

en utilisant, pour tout k compris entre 2 et $n + 1$ la partition :

$$\begin{aligned}\{(i_1, \cdots, i_k) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n+1\} &= \{(i_1, \cdots, i_k) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k < n+1\} \\ &\cup \{(i_1, \cdots, i_{k-1}, n+1) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_{k-1} < n+1\}\end{aligned}$$

□

Avec l'exercice 4.15, on donne une preuve plus élégante de cette formule en utilisant une formule de Poincaré pour les fonctions indicatrices d'ensemble (théorème 1.14).

En probabilités élémentaires, on peut être conduit à considérer des tirages de p objets pris dans un ensemble F à n éléments.

Il y a essentiellement quatre façons de procéder.

— On peut effectuer des tirages avec remise et avec ordre, ce qui signifie que l'on extrait les objets un à un en remettant, après chaque tirage, l'objet dans l'ensemble F. Un tel tirage est un arrangement (l'ordre est important) avec répétitions et revient à se donner une application de $E = \{1, \cdots, p\}$ dans F, ce qui donne n^p possibilités. Par exemple, former des sigles avec p lettres de l'alphabet est un arrangement avec répétitions de p lettres parmi les 26.

— On peut effectuer des tirages sans remise et avec ordre, ce qui signifie que l'on extrait les objets un à un sans les remettre dans l'ensemble F. Un tel tirage est un arrangement sans répétitions et revient à se donner une application injective de $E = \{1, \cdots, p\}$ dans F, ce qui donne 0 possibilités si $p > n$ et $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ possibilités si $p \leq n$. Par exemple, un jeu de tiercé est un arrangement sans répétitions de 3 chevaux parmi n.

— On peut extraire les p objets simultanément. Un tel tirage est une combinaison (l'ordre n'a pas d'importance) sans répétitions et revient à choisir un sous ensemble A à p éléments dans F. Un tel ensemble A étant choisi, il peut être ordonné de $p!$ façons, ce qui donne $p!$ arrangements, on a donc en notant $\dbinom{n}{p}$ ce nombre de combinaisons, $A_n^p = p!\dbinom{n}{p}$, soit $\dbinom{n}{p} = 0$ si $p > n$ et $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ si $p \leq n$. Cette quantité est aussi le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Par exemple, un jeu de loto est une combinaison de 6 numéros parmi 49.

— On peut extraire les p objets simultanément et parmi ces objets certains sont identiques. Un tel tirage est une combinaison (l'ordre n'a pas d'importance) avec répétitions. La donnée d'un tel tirage équivaut à celle d'un n-uplet $(\mu_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'entiers positifs ou nul tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mu_k = p$. En notant Γ_n^p le nombre de toutes ces combinaisons, on vérifie facilement qu'on a la relation de récurrence $\Gamma_n^p = \Gamma_{n-1}^p + \Gamma_n^{p-1}$ avec les conditions initiales $\Gamma_n^0 = \Gamma_1^p = 1$, ce qui implique que $\Gamma_n^p = \dbinom{n+p-1}{p}$ (exercice 1.8). Par exemple, une pièce d'un jeu de domino est formé de deux symboles pris dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, Blanc\}$, l'ordre de deux symboles étant sans importance et les répétitions possibles.

Les relations suivantes sur les coefficients binomiaux $\dbinom{n}{p}$ sont à connaître :

▷ $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$ pour $0 \leq p \leq n$;

▷ $\dbinom{n}{n} = \dbinom{n}{0} = 1$ pour $n \geq 0$;

- ▷ $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n-1$;
- ▷ $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n-1$ (triangle de Pascal) ;
- ▷ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et a et b dans un anneau commutatif $\mathbb{A}$ (formule du binôme de Newton) ;
- ▷ $(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$ dans l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ pour $n \in \mathbb{N}$;
- ▷ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$ (en prenant respectivement $X = 1$ et $X = -1$ dans l'égalité de Newton), ces égalités entraînant que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{0 \leq 2j \leq n} \binom{n}{2j} = \sum_{0 \leq 2j+1 \leq n} \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1}$.

1.2 Quelques classiques dénombrements

La formule d'inversion de Pascal qui suit nous sera utile pour calculer le nombre de dérangements d'un ensemble fini ainsi que le nombre de surjections entre deux ensembles finis.

Théorème 1.4. Formule d'inversion de Pascal

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$$

on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$$

Preuve. On peut prouver cette formule en utilisant un argument d'algèbre linéaire.

Pour $n = 0$, c'est clair. En supposant $n \geq 1$, on note F et G les vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ définis par $F = (f_k)_{0\leq k\leq n}$, $G = (g_k)_{0\leq k\leq n}$ et on a $F = PG$, où P est la matrice carrée d'ordre $n+1$:

$$P = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

(matrice de Pascal) et il s'agit de montrer que P est inversible, puis de calculer son inverse. En utilisant, pour $0 \leq k \leq n$, l'égalité $(1+X)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, on remarque que :

$$Q = {}^tP = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique $\left(X^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ à la base $\left((1+X)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette matrice est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\left((1+X)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ à $\left(X^k\right)_{0 \leq k \leq n}$, qui s'obtient avec :

$$X^k = (1 + X - 1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (1+X)^j (-1)^{k-j}$$

On a donc :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & -\binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & (-1)^n \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & -\binom{2}{1} & \cdots & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & (-1) \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

et :

$$P^{-1} = {}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{0} & -\binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ (-1)^n \binom{n}{0} & (-1)^{n-1} \binom{n}{1} & \cdots & (-1) \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

L'égalité $G = P^{-1}F$ nous donne alors $g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$. □

On peut aussi vérifier directement la formule d'inversion, dans la mesure où on a l'intuition de cette formule, ce qui n'est pas évident (exercice 1.11).

1.2.1 Dérangements d'un ensemble à n éléments

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.

On rappelle qu'une permutation de I_n est une bijection de I_n sur lui même et que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ de ces permutations est un groupe appelé groupe symétrique.

Définition 1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle dérangement de I_n, toute permutation σ de I_n n'ayant aucun point fixe (i. e. telle que $\sigma(i) \neq i$ pour tout $i \in I_n$).*

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note δ_p le nombre de dérangements de I_p. On a $\delta_1 = 0$ et, par convention, on pose $\delta_0 = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 0 et n, on note $\mathcal{S}_{n,k}$ le sous-ensemble du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ formé des permutations de I_n qui ont exactement k points fixes. Pour $k = 0$, les éléments de $\mathcal{S}_{n,0}$ sont les dérangements de I_n. Pour $k = n$, on a $\mathcal{S}_{n,n} = \{Id\}$ et pour $k = n - 1$, on a $\mathcal{S}_{n,n-1} = \emptyset$ puisqu'une permutation qui a $n - 1$ points fixes en a obligatoirement n, il n'en n'existe donc pas qui ont exactement $n - 1$ points fixes.

Lemme 1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 0 et n, on a* $\operatorname{card}(\mathcal{S}_{n,k}) = \binom{n}{k}\delta_{n-k}$.

Preuve. Pour $k = 0$, $\mathcal{S}_{n,0}$ est l'ensemble des dérangements et $\operatorname{card}(\mathcal{S}_{n,0}) = \delta_n$. Pour $k = n$, $\mathcal{S}_{n,n}$ est réduit à $\{Id\}$ et on a convenu que $\delta_0 = 1$. Pour $k = n - 1$, $\mathcal{S}_{n,n-1}$ est vide et $\delta_1 = 0$. Pour $n \geq 3$ et k compris entre 1 et $n - 2$, en choisissant un ensemble de k points fixes dans I_n, il y a δ_{n-k} dérangements possibles pour les $n - k$ points restants et comme il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces k points fixes, on a $\operatorname{card}(\mathcal{S}_{n,k}) = \binom{n}{k}\delta_{n-k}$. □

Théorème 1.5.

$$\textit{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \textit{ on a } n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\delta_k \textit{ et } \delta_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Preuve. Pour $n = 0$ c'est clair vu les conventions $0! = \delta_0 = 1$. Pour $n \geq 1$, en utilisant la partition $\mathcal{S}_n = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{S}_{n,k}$, on obtient :

$$n! = \operatorname{card}(\mathcal{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(\mathcal{S}_{n,k}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\delta_k$$

puis, en utilisant la formule d'inversion de Pascal, on en déduit que :

$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

□

Remarque 1.1 *Pour tout entier naturel n, on a* $\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{\delta_n}{n!} + R_n$, *où* $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ *(majoration du reste d'une série alternée). Il en résulte que, pour tout $n \geq 2$, on a :*

$$\left| \frac{n!}{e} - \delta_n \right| = n! \, |R_n| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$$

donc $-\frac{1}{2} < \frac{n!}{e} - \delta_n < \frac{1}{2}$ *et en conséquence,* $\delta_n < \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} < \delta_n + 1$, *ce qui implique que* $\delta_n = \left[\frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right] \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n!}{e}$. *Pour $n = 1$, on a* $\delta_1 = 0 = E\left(\frac{1}{e} + \frac{1}{2} \right)$.

L'expression de δ_n obtenue avec le théorème précédent peut se retrouver en utilisant la formule de Poincaré sur les cardinaux (exercice 1.12). Elle peut aussi se prouver par récurrence (exercice 1.14) ou en utilisant une série génératrice (exercice 1.15).

1.2.2 Nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments

Pour tout couple (p, n) d'entiers naturels non nuls, on désigne par $u_{p,n}$ le nombre d'applications surjectives de l'ensemble I_p sur l'ensemble I_n (ou plus généralement d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments) en convenant que $u_{p,0} = 0$ pour tout entier naturel non nul p.

Si φ est une surjection de I_p sur I_n, on a nécessairement $p \geq n$, (théorème 1.2), donc $u_{p,n} = 0$ pour $n > p$.

L'unique application de I_p sur I_1 étant surjective, on a $u_{p,1} = 1$ et toute surjection de I_n sur I_n étant bijective, on a $u_{n,n} = n!$

Théorème 1.6.

Pour $p \geq n \geq 1$, on a $n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p,k}$ *et* $u_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p$.

Preuve. Le nombre d'applications de I_p dans I_n est card $\left(I_n^{I_p} \right) = n^p$. Toute application φ de I_p dans I_n est surjective de I_p sur $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ qui est une partie de I_n à k éléments, où k est un entier compris entre 1 et n. Pour k fixé entre 1 et n, il y a $u_{p,k}$ surjections possibles de I_p sur une partie A de I_n à k éléments et comme il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une telle partie A, cela nous donne $\binom{n}{k} u_{p,k}$ surjections possibles de I_p sur une partie de I_n à k éléments, donc un total de $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} u_{p,k}$

applications possibles de I_p dans I_n. Avec la convention $u_{p,0} = 0$, on déduit que $n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p,k}$. En utilisant la formule d'inversion de Pascal, on en déduit que $u_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p$. □

L'expression de $u_{p,n}$ obtenue avec le théorème précédent peut aussi se prouver en utilisant une série génératrice (exercice 1.16).

Pour $p = n$, on retrouve bien le nombre de bijections $u_{n,n} = n!$; pour $p = n+1$ on a $u_{n+1,n} = \frac{n}{2}(n+1)!$; pour $p = n+2$, on a $u_{n+2,n} = \frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$ (exercice 1.16).

1.2.3 Nombre de partitions d'un ensemble à n éléments

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par β_n le nombre de partitions de I_n (nombres de Bell) et on convient que $\beta_0 = 1$.

On a par exemple, $I_1 = \{1\}$ et $\beta_1 = 1$; $I_2 = \{1,2\} = \{1\} \cup \{2\}$ et $\beta_2 = 2$; $I_3 = \{1,2,3\} = \{1\} \cup \{2,3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1,2\} \cup \{3\} = \{1,3\} \cup \{2\}$ et $\beta_3 = 5$.

Lemme 1.2 *Pour tout $n \in N^*$, on a $\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k$.*

Preuve. On désigne par $\mathcal{E}_{n+1}$ l'ensemble de toutes les partitions de I_{n+1} et on le partitionne en $\mathcal{E}_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{E}_{n+1,k}$, où $\mathcal{E}_{n+1,k}$ est l'ensemble de toutes les partitions de la forme $I_{n+1} = J_1 \cup \cdots \cup J_p$, où le sous-ensemble J_p de I_{n+1} contient $n+1$ et est de cardinal $k+1$. Choisir J_p revient à choisir une partie à k éléments dans I_n, ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités et pour J_p choisi, il y a β_{n-k} partitions possibles de $I_{n+1} \setminus J_p$. On a donc $\operatorname{card}(\mathcal{E}_{n+1,k}) = \binom{n}{k} \beta_{n-k}$ et :

$$\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} \beta_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \beta_j$$

□

Lemme 1.3 *Pour tout $n \in N^*$, on a l'encadrement $\sqrt{(n-1)!} \leq \beta_n \leq n!$*

Preuve. On a $\beta_0 = \beta_1 = 1$, donc l'inégalité $\beta_n \leq n!$ est acquise pour $n = 0, 1$. La supposant acquise jusqu'au rang $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\beta_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \\ &\leq (n+1)\, n! = (n+1)!\end{aligned}$$

Montrons ensuite que $\beta_n^2 \geq (n-1)!$ pour $n \geq 1$. On a :

$$\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_{n-k} \geq \binom{n}{1} \beta_{n-1} = n\beta_{n-1}$$

donc :

$$\begin{aligned} \beta_{2p+1} &\geq (2p)\,\beta_{2p-1} \geq (2p)\,(2\,(p-1))\,\beta_{2p-3} \\ &\geq \cdots \geq (2p)\,(2\,(p-1))\cdots(2)\,\beta_1 = 2^p p! \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \beta_{2p} &\geq (2p-1)\,\beta_{2(p-1)} \geq (2p-1)\,(2p-3)\,\beta_{2(p-2)} \\ &\geq \cdots \geq (2p-1)\,(2p-3)\cdots(1)\,\beta_1 = \frac{(2p)!}{2^p p!} \end{aligned}$$

Il en résulte que $\beta_{2p+1}^2 \geq \beta_{2p+1}\beta_{2p} \geq 2^p p! \dfrac{(2p)!}{2^p p!} = (2p)!$ et :

$$\beta_{2p}^2 \geq \beta_{2p}\beta_{2p-1} \geq \frac{(2p)!}{2^p p!} 2^{p-1}\,(p-1)! = \frac{(2p)!}{2p} = (2p-1)!$$

On a au final, l'encadrement $\sqrt{(n-1)!} \leq \beta_n \leq n!$ □

Théorème 1.7. Formule de Dobinski

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $\beta_n = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Preuve. De $\dfrac{\beta_n}{n!} \geq u_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{n!}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on déduit que la série entière $\sum \dfrac{\beta_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence infini. On note $f(x)$ sa somme. On a le produit de Cauchy des séries entières :

$$\begin{aligned} f(x)\,e^x &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\beta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}\right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{(n-1)!} x^{n-1} = f'(x) \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lambda e^{\int e^x dx} = \lambda e^{e^x}$$

avec $f(0) = \beta_0 = 1 = \lambda e$, ce qui nous donne $\lambda = \dfrac{1}{e}$ et $f(x) = \dfrac{1}{e} e^{e^x} = e^{e^x - 1}$. Pour tout réel x, on a :

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$$

Comme $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{(k|x|)^n}{k!n!} = e^{e^{|x|}} < +\infty$, la série double $\sum_{(k,n)\in\mathbb{N}^2} \frac{(kx)^n}{k!n!}$ est absolument sommable et on peut écrire que $e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}$ et :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}$$

ce qui nous donne $\beta_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

1.2.4 Nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k parties

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 1 et n, on note $S_{n,k}$ le nombre de partitions de $I_n = \{1, \cdots, n\}$ en k parties. On convient que $S_{n,0} = 0$ et $S_{0,0} = 1$. Les $S_{n,k}$ sont les nombres de Stirling de deuxième espèce.

L'unique partition de I_n en n parties est $I_n = \bigcup_{j=1}^{n} \{j\}$, donc $S_{n,n} = 1$.

Le nombre de partitions de I_n est $\beta_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$.

Le nombre $u_{n,k}$ de surjections de I_n sur I_k peut s'exprimer en fonction du nombre de Stirling $S_{n,k}$

Théorème 1.8.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout entier k compris entre 1 et n, le nombre de surjections de I_n sur I_k est $u_{n,k} = k!S_{n,k}$.

Preuve. Pour toute surjection f de I_n sur I_k, on a la partition $I_n = \bigcup_{j=1}^{k} f^{-1}\{j\}$.

Réciproquement, à toute partition $I_n = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$, on peut associer la surjection f de I_n sur I_k définie par $f(i) = j$ pour tout $j \in \{1, \cdots, k\}$ et tout $i \in A_j$. Comme il y a $k!$ bijections de $\{A_1, \cdots, A_k\}$ sur I_k et $S_{n,k}$ partitions de I_n en k parties, on en déduit que $u_{n,k} = k!S_{n,k}$. □

Du théorème précédent, on déduit une expression des nombres de Bell β_n.

Corollaire 1.1. *En notant* $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} S_{n-k} \frac{k^n}{k!}$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} S_{n-k} \frac{k^n}{k!} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{k^n}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{k+j}{k} \frac{k^n}{(k+j)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{k^n}{i!} = \sum_{1 \leq k \leq i \leq n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{k^n}{i!} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_{n,i}}{i!} = \sum_{i=1}^{n} S_{n,i} = \beta_n
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.9.

Pour tout entier $n \geq 2$ *et tout entier* k *compris entre* 1 *et* $n-1$, *on a* $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$.

Preuve. Pour $k = 1$, on a $1 = S_{n,1} = S_{n-1,0} + S_{n-1,1}$. Pour $k \geq 2$, si $I_n = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$ est une partition de I_n en k parties, il y a alors deux possibilités, soit l'un des A_i est égal à $\{n\}$ et dans ce cas $\bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} A_j$ est une partition de I_{n-1} en $k-1$ parties, ce qui donne $S_{n-1,k-1}$ possibilités, soit aucun des A_i n'est égale à $\{n\}$ et dans ce cas n est dans l'un des A_i (k possibilités), de sorte que $(A_i \setminus \{n\}) \cup \bigcup_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} A_j$ est une partition de I_{n-1} en k parties (comme $A_i \neq \{n\}$, il a au moins deux éléments), ce qui donne $kS_{n-1,k}$ possibilités. On a donc la relation de récurrence, $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$. □

Le théorème précédent nous donne une formule de récurrence pour le nombre de surjections de I_n sur I_k :

$$\begin{aligned}
u_{n,k} &= k!S_{n,k} = k\left((k-1)!S_{n-1,k-1} + k!S_{n-1,k}\right) \\
&= k\left(u_{n-1,k-1} + u_{n-1,k}\right)
\end{aligned}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$.

Ces nombres de Stirling apparaissent aussi comme les coefficients de la matrice de passage de la base $(P_n)_{0\leq n\leq m}$ à la base canonique $(X^n)_{0\leq n\leq m}$ de $\mathbb{R}_m[X]$, où $P_0(X) = 1$ et $P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ pour $n \geq 1$. Précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 1.10.

La famille de polynômes $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une base de* $\mathbb{R}[X]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $X^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k(X)$.

Preuve. La famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui échelonnée en degrés (*i. e.* $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$) est une une base de $\mathbb{R}[X]$.

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $1 = P_0(X) = S_{0,0}$ et :

$$X = P_1(X) = S_{1,0}P_0(X) + S_{1,1}P_1(X)$$

Supposant le résultat acquis au rang $n-1 \geq 1$, on a :

$$X^n = X \cdot X^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k}XP_k(X)$$

avec $P_{k+1}(X) = (X-k)P_k(X)$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} X^n &= \sum_{k=0}^{n-1} S_{n-1,k}\left(P_{k+1}(X) + kP_k(X)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} S_{n-1,k-1}P_k(X) + \sum_{k=1}^{n-1} kS_{n-1,k}P_k(X) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}\right)P_k(X) = \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}P_k(X) = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}P_k(X) \end{aligned}$$

□

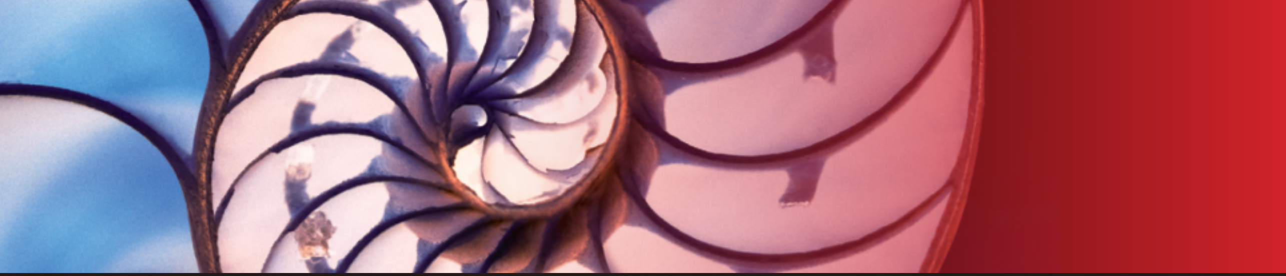
1.3 Fonctions indicatrices d'ensembles

À toute partie A de Ω, on associe sa fonction indicatrice (ou caractéristique) définie par :

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{1}_A : & \Omega & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

On vérifie facilement, que pour toute partie A de Ω, on a $\mathbf{1}_{\Omega\setminus A} = 1 - \mathbf{1}_A$.

Les fonctions indicatrices permettent de transformer des opérations ensemblistes ou probabilistes en opérations algébriques sur des fonctions.



Probabilités pour la Licence

Parfaitement adapté à la diversité des parcours scientifiques universitaires, ce manuel couvre l'ensemble du programme de probabilités enseigné en première et en deuxième année de licence mathématiques.

Il ne s'agit pas d'un manuel de « méthodes » où l'on sacrifie la notion de rigueur qui est l'essence même des mathématiques. Les notions étudiées ici le sont de façon rigoureuse en démontrant tous les résultats énoncés. Les six chapitres sont consacrés à l'étude de l'analyse combinatoire (outils ensemblistes et dénombrement), aux axiomes de probabilités et aux variables aléatoires en étudiant le cas discret, puis le cas général et enfin le cas des variables aléatoires à densité. Ce cours est aussi une application importante de l'étude des séries numériques, des séries de fonctions et de l'intégration développées dans le volume d'analyse. Bibliographie sélective et index viennent compléter l'ensemble.

LES PLUS

- **Cours rédigé avec démonstration systématique des résultats énoncés**
- **Chaque théorème est suivi d'une série d'applications**
- **Tous les exercices sont intégralement corrigés**

Docteur en mathématiques, professeur agrégé à l'université Grenoble-Alpes, **Marie-Cécile Darracq** enseigne les mathématiques en Licence. Membre du jury du Capes externe de 2006 à 2009, puis de l'agrégation interne depuis 2010, elle est directrice des études du Département Sciences Drôme-Ardèche de l'université Grenoble-Alpes.

Agrégé de mathématiques, **Jean-Étienne Rombaldi** a enseigné à l'université Grenoble-Alpes, institut Fourier. Membre du jury du CAPES externe et de l'agrégation interne de mathématiques pendant plusieurs années, il a été responsable de la préparation à l'agrégation interne de l'université de Grenoble et préparateur à l'agrégation interne et externe de cette même université ainsi que pour le CNED.

Conception graphique : Primo&Primo®

ISBN : 978-2-8073-3223-2

9 782807 332232

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com