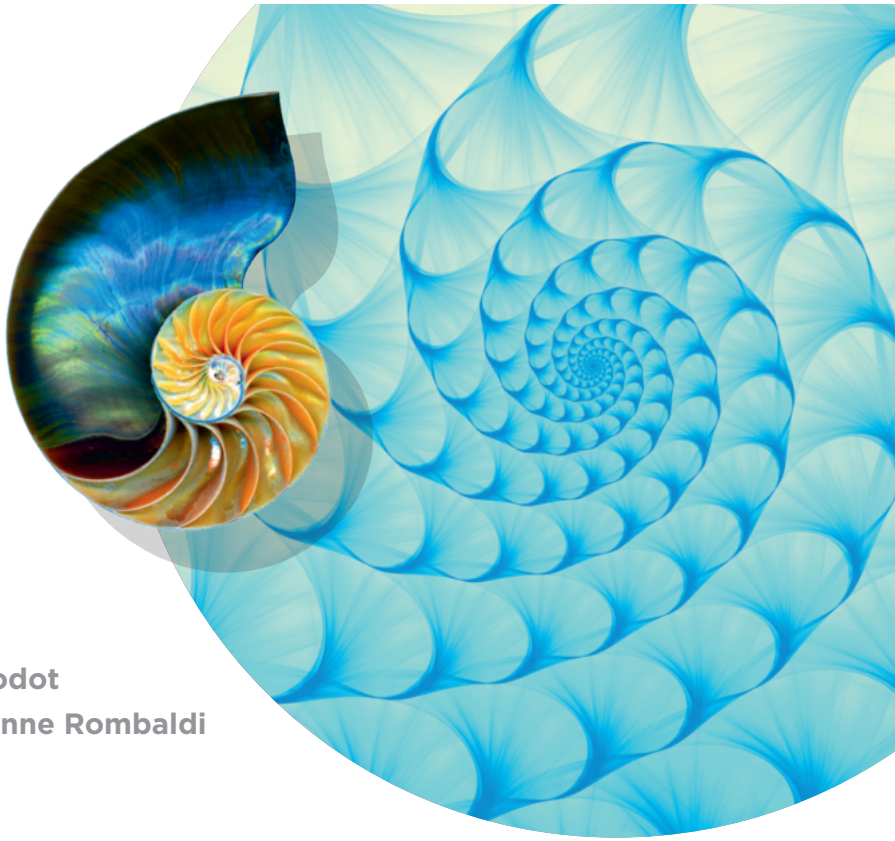
Licence | Prépas | Capes

FORMULAIRE DE MATHS

AVEC RÉSUMÉS DE COURS



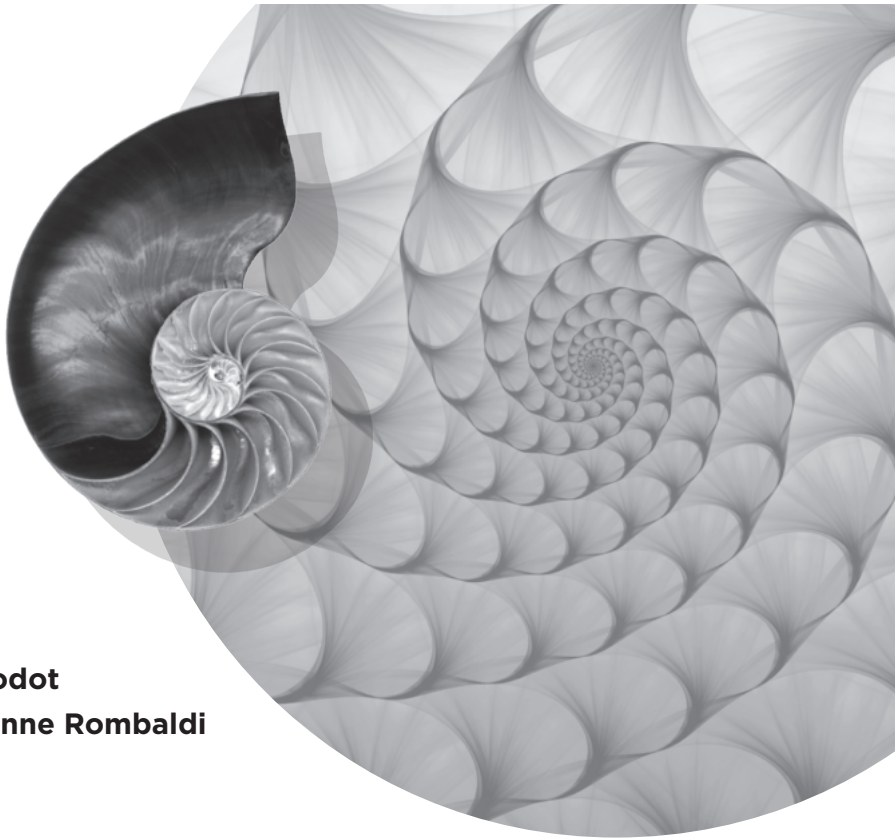
Olivier Rodot
Jean-Étienne Rombaldi

deboeck SUPÉRIEUR

Licence | Prépas | Capes

FORMULAIRE DE MATHS

AVEC RÉSUMÉS DE COURS



Olivier Rodot
Jean-Étienne Rombaldi

deboeck SUPÉRIEUR

Chez le même éditeur (extrait du catalogue)

Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Analyse pour la Licence*
Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Algèbre et géométrie pour la Licence*
Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Probabilités pour la Licence*
Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Analyse*
Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Algèbre et géométrie*
Darracq M.-C. & Rombaldi J.-É., *Mathématiques pour le Capes. Probabilités*

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web :
www.deboecksuperieur.com

En couverture : Coupe d'un nautile © Getty Images

Relectures : François Pantigny et Jérôme Cartailler
Maquette intérieure : Hervé Soulard/Nexeme, François Pantigny et Olivier Rodot
Mise en pages des auteurs
Maquette de couverture : Primo&Primo

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2022/13647/098
Bibliothèque nationale, Paris : août 2022
ISBN : 978-2-8073-3988-0

Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme ou de quelque manière que ce soit.

© De Boeck Supérieur SA, 2022 - Rue du Bosquet 7, B1348 Louvain-la-Neuve
De Boeck Supérieur - 5 allée de la 2e DB, 75015 Paris

Table des matières

ANALYSE

par Olivier RODOT

1 Suites numériques **15**

1.1 Borne supérieure, borne inférieure . . . 15
1.2 Généralités sur les suites réelles . . . 16
1.3 Limite d'une suite réelle . . . 18
1.4 Suites monotones et suites adjacentes . . . 20
1.5 Traductions séquentielles . . . 21
1.6 Extension aux suites complexes . . . 22
1.7 Suites extraites . . . 24
1.8 Suites arithmético-géométriques . . . 25
1.9 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . 27
1.10 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 28

2 Fonctions numériques d'une variable réelle **29**

2.1 Rappels du vocabulaire usuel sur les fonctions . . . 29
2.2 Compléments sur les fonctions usuelles . . . 32
2.3 Limite d'une fonction en un point . . . 35
2.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes . . . 41
2.5 Continuité . . . 42
2.6 Théorèmes relatifs à la continuité . . . 44
2.7 Continuité par morceaux . . . 47
2.8 Continuité uniforme et fonction lipschitzienne . . . 48
2.9 Dérivabilité . . . 49
2.10 Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ . . . 52
2.11 Extremum local . . . 53
2.12 Théorèmes relatifs à la dérivabilité . . . 55
2.13 Convexité . . . 57

2.14 Comparaison asymptotique 60
2.15 Comparaison asymptotique (cas des suites) 65
2.16 Développements limités 68

3 Intégration **74**
3.1 Primitives 74
3.2 Intégration d'une fonction continue 75
3.3 Intégration d'une fonction continue par morceaux 76
3.4 Sommes de Riemann 79
3.5 Intégration par parties et par changement de variable 79
3.6 Formules de Taylor 80
3.7 Intégrabilité au sens de Riemann 80

4 Espaces vectoriels normés **83**
4.1 Normes 83
4.2 Distance 84
4.3 Produit d'espaces vectoriels normés 85
4.4 Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé 85
4.5 Boules et sphères 87
4.6 Normes équivalentes 88
4.7 Voisinage, ouvert, fermé 89
4.8 Caractérisations séquentielles 91
4.9 Partie dense 92
4.10 Voisinages relatifs, ouverts et fermés relatifs 92
4.11 Limites dans les espaces vectoriels normés 94
4.12 Continuité 96
4.13 Uniforme continuité 98
4.14 Applications lipschitziennes 98
4.15 Applications linéaires continues 99
4.16 Parties compactes 102
4.17 Continuité sur une partie compacte 103
4.18 Connexité par arcs 103
4.19 Espaces vectoriels normés de dimension finie 105
4.20 Complétude 107

5 Séries numériques **110**
5.1 Convergence et divergence 110
5.2 Série géométrique 111
5.3 Somme et reste d'une série convergente 111
5.4 Somme de deux séries numériques et produit par un scalaire . . . 112
5.5 Condition nécessaire de convergence et série harmonique 112
5.6 Séries à termes positifs 113
5.7 Séries à termes quelconques 116

5.8 Sommation des relations de comparaison . . . 119
5.9 Produit de deux séries numériques . . . 120
5.10 Comparaison série-intégrale . . . 120
5.11 Sommes de séries convergentes classiques . . . 120
5.12 Familles sommables . . . 121

6 Intégrales généralisées 126
6.1 Convergence et divergence . . . 126
6.2 Linéarité, conjugaison, croissance et stricte positivité . . . 128
6.3 Intégrales de Riemann . . . 129
6.4 Cas des fonctions positives . . . 129
6.5 Critères de comparaison . . . 130
6.6 Comparaison série-intégrale . . . 130
6.7 Intégration par parties et par changement de variable . . . 131
6.8 Comportement asymptotique . . . 132
6.9 Fonctions intégrables . . . 132
6.10 Intégrabilité par comparaison et domination . . . 133
6.11 Intégration des relations de comparaison . . . 134
6.12 Quelques calculs d'intégrales généralisées . . . 134
6.13 Suites et séries d'intégrales généralisées . . . 135
6.14 Intégrales généralisées à paramètre . . . 137

7 Équations différentielles linéaires 139
7.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . 139
7.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants 141
7.3 Exponentielle d'une matrice . . . 143
7.4 Système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants . . . 144
7.5 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 . . . 146
7.6 Équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1 . . . 147
7.7 Équations différentielles linéaires d'ordre n . . . 148

8 Suites de fonctions 150
8.1 Convergence simple et convergence uniforme . . . 150
8.2 Convergence uniforme et continuité . . . 152
8.3 Convergence uniforme et double limite . . . 153
8.4 Intégration d'une suite de fonctions . . . 153
8.5 Dérivation d'une suite de fonctions . . . 154
8.6 Approximation uniforme . . . 155

9 Séries de fonctions 156
9.1 Convergence simple et convergence uniforme . . . 156
9.2 Convergence normale et convergence absolue . . . 158
9.3 Convergence uniforme et continuité . . . 160

9.4 Convergence uniforme et double limite . . . 160
9.5 Intégration terme à terme sur un segment . . . 161
9.6 Dérivation terme à terme . . . 161

10 Séries entières **162**
10.1 Rayon de convergence . . . 162
10.2 Règles de d'Alembert et de Cauchy . . . 164
10.3 Comparaisons des rayons de convergence . . . 165
10.4 Opérations sur les séries entières . . . 166
10.5 Dérivée et primitive d'une série entière . . . 167
10.6 Convergence normale . . . 168
10.7 Séries entières d'une variable réelle . . . 168
10.8 Fonctions développables en série entière . . . 171
10.9 Fonctions d'une variable réelle développables en série entière . . . 172

11 Séries de Fourier **176**
11.1 Séries trigonométriques . . . 176
11.2 Coefficients et séries de Fourier . . . 177
11.3 Espace de Dirichlet . . . 179
11.4 Inégalité de Bessel et lemme de Riemann-Lebesgue . . . 180
11.5 Théorèmes de convergence . . . 181

12 Fonctions vectorielles **184**
12.1 Limite, continuité et dérivabilité . . . 184
12.2 Opérations sur les fonctions dérivables . . . 187
12.3 Intégration sur un segment . . . 188
12.4 Sommes de Riemann . . . 190
12.5 Intégrale fonction de sa borne supérieure . . . 190
12.6 Formules de Taylor . . . 191
12.7 Arcs paramétrés du plan . . . 192

13 Calcul différentiel **197**
13.1 Application différentiable et différentielle . . . 197
13.2 Dérivées partielles . . . 201
13.3 Matrice jacobienne et jacobien . . . 204
13.4 Gradient . . . 206
13.5 Applications de classe $\mathscr{C}^1$ . . . 207
13.6 Vecteurs tangents . . . 208
13.7 Point critique et extremum . . . 210
13.8 Applications de classe $\mathscr{C}^k$ . . . 211

13.9 Formule de Taylor-Young 212

ALGÈBRE

par Jean-Étienne ROMBALDI

14 Théorie des ensembles **217**
14.1 Quelques notions de logique 217
14.2 Notions de base sur les ensembles 220
14.3 Les symboles $\sum$ et $\prod$ 221
14.4 L'algèbre des parties d'un ensemble 222
14.5 Fonctions, injectivité, surjectivité, bijectivité 223
14.6 Relations d'ordre et d'équivalence 226

15 Groupes, anneaux et corps **227**
15.1 Groupes monogènes 231
15.2 Groupes finis, théorème de Lagrange 232
15.3 Morphismes de groupes 232
15.4 Ordre d'un élément dans un groupe 234
15.5 Groupe des permutations d'un ensemble fini 235
15.6 Anneaux 239
15.7 Éléments inversibles dans un anneau 240
15.8 Sous-anneaux 241
15.9 Morphismes d'anneaux 241
15.10 Corps 243
15.11 Morphismes de corps 244

16 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ **245**
16.1 Théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ 245
16.2 Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple . . . 246
16.3 L'algorithme d'Euclide 249
16.4 L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers 250
16.5 Décomposition en facteurs premiers 251
16.6 Les théorèmes de Fermat et de Wilson 252
16.7 Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et l'indicatrice d'Euler 252

17 Nombres complexes **255**
17.1 Construction de $\mathbb{C}$ 255
17.2 Conjugué et module d'un nombre complexe 256
17.3 Les équations de degré 2 257
17.4 Arguments d'un nombre complexe 258
17.5 Racines n-ièmes d'un nombre complexe 259

18 Espaces vectoriels **261**
18.1 Sous-espaces vectoriels 262
18.2 Applications linéaires 264
18.3 Dualité 266
18.4 Sommes et sommes directes de sous-espaces vectoriels 268
18.5 Familles libres, familles génératrices et bases 270
18.6 Espaces vectoriels de dimension finie 271
18.7 Rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire . . . 275
18.8 Applications linéaires et calcul matriciel 277
18.9 Formules de changement de base 283

19 Déterminants **284**
19.1 Opérations élémentaires. Matrices de dilatation et de transvection 284
19.2 Déterminants des matrices carrées 285
19.3 Déterminant d'une famille de vecteurs 288
19.4 Déterminant d'un endomorphisme 289
19.5 Systèmes linéaires 290

20 Polynômes à coefficients dans un corps **293**
20.1 L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ 293
20.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ 296
20.3 Polynômes premiers entre eux 298
20.4 Racines des polynômes 299
20.5 Théorème de Leibniz et formule de Taylor 301
20.6 Polynômes irréductibles 303
20.7 Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples . . . 304
20.8 Polynômes d'interpolation de Lagrange 306

21 Réduction des endomorphismes **307**
21.1 Valeurs et vecteurs propres 307
21.2 Diagonalisation 308
21.3 Endomorphismes trigonalisables 309
21.4 Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal 310
21.5 Sous-espaces caractéristiques 314

22 Formes bilinéaires et quadratiques **317**
22.1 Formes bilinéaires 317
22.2 Expression matricielle des formes bilinéaires. 318
22.3 Formes quadratiques 319
22.4 Théorème de réduction de Gauss 320
22.5 Orthogonalité, noyau et rang 321
22.6 Signature d'une forme quadratique réelle en dimension finie . . . 324
22.7 Quadriques dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ 325

23 Espaces préhilbertiens **327**
23.1 Produit scalaire . . . 327
23.2 Orthogonalité . . . 329
23.3 Orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . 331
23.4 Adjoint d'un endomorphisme . . . 332
23.5 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie . . . 333
23.6 Symétries orthogonales dans les espaces euclidiens . . . 335
23.7 Les endomorphismes symétriques réels . . . 337
23.8 Isométries vectorielles . . . 339
23.9 Orientation d'un espace euclidien . . . 341
23.10 Produit vectoriel dans un espace euclidien . . . 341
23.11 Isométries vectorielles en dimension 2 . . . 343
23.12 Isométries vectorielles en dimension 3 . . . 344
23.13 Espaces vectoriels hermitiens . . . 345
23.14 Réduction des matrices normales . . . 347

24 Géométrie affine et euclidienne **349**
24.1 Espace affine associé à un espace vectoriel . . . 349
24.2 Le groupe affine GA($\mathscr{E}$) en dimension finie . . . 353
24.3 Espaces affines euclidiens . . . 355
24.4 Hyperplans dans un espace euclidien . . . 357
24.5 Isométries affines d'un espace euclidien . . . 358
24.6 Barycentres . . . 359

PROBABILITÉS

par Jean-Étienne ROMBALDI

25 Dénombrement et probabilités **365**
25.1 Dénombrement . . . 365
25.2 Fonctions indicatrices d'ensembles . . . 367
25.3 Expérience aléatoire . . . 368
25.4 Tribus d'événements, espaces probabilisables . . . 368
25.5 Espaces probabilisés . . . 371
25.6 Espaces probabilisés discrets . . . 372
25.7 Probabilités conditionnelles . . . 373
25.8 Événements indépendants . . . 374

26 Variables aléatoires réelles discrètes **376**
26.1 Opérations sur les variables aléatoires réelles discrètes . . . 379
26.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète . . . 380
26.3 Loi conjointe et lois marginales . . . 381

26.4 Variables aléatoires discrètes indépendantes 381
26.5 Espérance, variance, moments d'une variable aléatoire discrète . . 383
26.6 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète 387

27 Variable aléatoires réelles **390**
27.1 Fonction de répartition d'une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 390
27.2 Variables aléatoires réelles 391
27.3 Variables aléatoires réelles indépendantes 393
27.4 Espérance d'une variable aléatoire réelle 394
27.5 Variance, covariance, moments d'ordre r 397
27.6 Loi faible des grands nombres 400

28 Variables aléatoires à densité **402**
28.1 Densité de probabilité 402
28.2 Variables aléatoires à densité classiques 404
28.3 Espérance des variables aléatoires à densité 406
28.4 Formule de transfert, moments d'ordre r 407
28.5 Convergence en loi, théorème de la limite centrale 408

Annexe
Fonctions trigonométriques 413
Formules de trigonométrie 414
Dérivées usuelles 415
Primitives usuelles 416
Développements limités usuels 417
Développements en séries entières usuels 417

Index **419**

Avant-propos

Cet ouvrage dépasse le cadre classique d'un formulaire : il contient un résumé complet de cours comprenant souvent des remarques, parfois des exemples ou des contre-exemples. Il couvre le programme des classes préparatoires scientifiques, en particulier les programmes de MPSI et MP, mais aussi certaines notions et certains chapitres étudiés dans le premier cycle universitaire (séries de Fourier, variables aléatoires à densité). Il intéressera également les candidats au Capes.

L'ouvrage est divisé en trois parties : analyse, rédigée par Olivier RODOT, algèbre et probabilités, rédigées par Jean-Étienne ROMBALDI.

L'index est particulièrement soigné afin de permettre à l'étudiant de trouver immédiatement l'information cherchée.

En fin d'ouvrage sont rassemblés un formulaire de trigonométrie, les dérivées et primitives usuelles ainsi que les développements limités et les développements en séries entières classiques.

Les auteurs espèrent que ce formulaire constituera une aide précieuse pour l'étudiant souhaitant s'assurer de l'assimilation du très vaste programme de mathématiques des deux premières années post-baccalauréat.

Nous tenons à remercier très chaleureusement le travail très ingrat et méticuleux de relecture assuré par François PANTIGNY et Jérôme CARTAILLER. Leurs remarques pertinentes se sont révélées très utiles.
Nous remercions également François PANTIGNY pour sa proposition de mise en page, notamment au niveau des en-têtes de chapitres.

Enfin, nous remercions les éditions De Boeck et, en particulier, Alain LUGUET, pour la confiance témoignée lors de la rédaction de cet ouvrage.

N'hésitez pas à nous faire part de vos remarques ou suggestions en nous envoyant un courrier électronique à l'adresse suivante : `rodot.livre.maths@gmail.com`

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI

ANALYSE

par Olivier RODOT

Suites numériques | 1

Les premières notions se concentrent sur l'étude des suites réelles puis s'étendront ensuite aux suites complexes.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Borne supérieure, borne inférieure

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit qu'un réel M est un *majorant* de A si, pour tout $x \in A$, $x \leqslant M$.

Le plus petit (s'il existe) des majorants de A est appelé la *borne supérieure*[1] de A notée $\sup A$.

On dit qu'un réel m est un *minorant* de A si, pour tout $x \in A$, $x \geqslant m$.

Le plus grand (s'il existe) des minorants de A est appelé la *borne inférieure*[2] de A notée $\inf A$.

Par exemple $]0, +\infty[$ n'admet pas de borne supérieure mais admet 0 comme borne inférieure.

Ne pas confondre plus grand élément et borne supérieure : par exemple, 1 est la borne supérieure de $[0, 1[$ mais $[0, 1[$ n'admet pas de plus grand élément. On remarquera que la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ n'appartient pas nécessairement à A.

En revanche, on a le théorème qui suit.

1. ou *supremum*.
2. ou *infimum*.

Théorème

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A admet un plus grand élément, alors A admet une borne supérieure vérifiant $\sup A = \max A$.
Si A admet un plus petit élément, alors A admet une borne inférieure vérifiant $\inf A = \min A$.

Théorème

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure [3].
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Théorème

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes [4] :

(i) $M = \sup A$;

(ii) $\begin{cases} M \text{ est un majorant de } A ; \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a > M - \varepsilon. \end{cases}$

Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes [5] :

(i) $m = \inf A$;

(ii) $\begin{cases} m \text{ est un minorant de } A ; \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ a < m + \varepsilon. \end{cases}$

1.2 Généralités sur les suites réelles

Définition

Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle *suite réelle* [6] toute application

$$u : \left\{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\right\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

L'image d'un entier naturel $n \geqslant N$ par u est alors notée u_n et la suite u est également le plus souvent notée $(u_n)_{n \geqslant N}$.

3. Ce résultat est faux pour $\mathbb{Q}$. Par exemple, $A = \left\{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leqslant 2\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Q}$ n'admettant pas de borne supérieure (dans $\mathbb{Q}$).

4. L'assertion (ii) exprime le fait que M est un majorant de A et que pour tout $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ n'est plus un majorant de A ce qui correspond bien à la définition du *plus petit des majorants de A*.

5. L'assertion (ii) exprime le fait que m est un minorant de A et que pour tout $\varepsilon > 0$, $m + \varepsilon$ n'est plus un minorant de A ce qui correspond bien à la définition du *plus grand des minorants de A*.

Pour faciliter la lecture de ce chapitre, on prendra $N = 0$ sachant que les définitions et théorèmes s'adaptent aisément au cas général [7].
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit qu'une suite réelle (u_n) vérifie une propriété P_n *à partir d'un certain rang* si [8]

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n \text{ vérifie la propriété } P_n.$$

Définition

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est *majorée* si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M.$$

Le réel M est alors appelé un *majorant* de (u_n).
On dit que (u_n) est *minorée* si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m.$$

Le réel m est alors appelé un *minorant* de (u_n).
On dit que (u_n) est *bornée* si (u_n) est majorée et minorée autrement dit si [9]

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M.$$

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle.
Alors (u_n) est bornée si, et seulement si, $\big(|u_n|\big)$ est majorée.

Une combinaison linéaire de suites réelles bornées est une suite réelle bornée de même que le produit de deux suites réelles bornées.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est *constante* si

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = c.$$

On dit que (u_n) est *stationnaire* si (u_n) est constante à partir d'un certain rang c'est-à-dire si [10]

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n = c.$$

6. On emploie aussi l'expression *suite de réels*.
7. Afin d'alléger l'écriture, (u_n) désignera dans le reste du chapitre et de l'ouvrage $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Ce qui s'écrit souvent en abrégé : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N$, u_n vérifie la propriété P_n.
9. Lorsque (u_n) est bornée, m et M sont des réels, ne dépendant donc pas de $n \in \mathbb{N}$, et ne sont pas uniques.
10. Ce qui s'écrit également en abrégé : $\exists N \in \mathbb{N}, \exists c \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant N$, $u_n = c$.

Par exemple, la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par[11] $u_n = \left\lfloor \frac{2}{n+1} \right\rfloor + 1$ est stationnaire car pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 1$.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

On dit que (u_n) est *croissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
On dit que (u_n) est *décroissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
On dit que (u_n) est *monotone* si (u_n) est croissante ou décroissante.

1.3 Limite d'une suite réelle

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

On dit que (u_n) admet[12, 13] une *limite* finie $\ell \in \mathbb{R}$ si[14]

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

(u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ signifie donc que, pour tout $\varepsilon > 0$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ à partir d'un certain rang.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

On dit (u_n) *tend vers* $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n > A.$$

On dit (u_n) *tend vers* $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n < A.$$

11. On rappelle que la fonction *partie entière*, notée $\lfloor \cdot \rfloor$, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
12. ou *converge vers* ou encore *tend vers*. Ces trois expressions synonymes sont à connaître.
13. Sous-entendu en $+\infty$ ou quand n tend vers $+\infty$.
14. En toute rigueur, on devrait écrire $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ mais l'abus habituel d'écriture $\forall \varepsilon > 0$ sera pratiqué dans tout l'ouvrage pour ce réel strictement positif sous-entendu aussi petit que l'on veut.

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle.

Si (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors ℓ est unique et sera notée[15] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

On dit que (u_n) *converge*[16] si (u_n) admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit qu'elle *diverge*[17] sinon.

Dire qu'une suite (u_n) diverge signifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou (u_n) n'admet pas de limite (finie).

Par exemple, la suite $(u_n) = \big((-1)^n\big)$ diverge car (u_n) n'admet pas de limite.

Théorème

Toute suite réelle convergente est bornée.

La réciproque de ce théorème est fausse : il suffit pour s'en convaincre de reprendre l'exemple précédent $(u_n) = \big((-1)^n\big)$.

Théorème

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Alors

- $(\lambda u_n + v_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda\ell + \ell'$;
- $(u_n v_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge[18] et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$;
- si (u_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

15. On écrira aussi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $u_n \longrightarrow \ell$.
16. ou est *convergente*.
17. ou est *divergente*.
18. On montre facilement que comme $\ell' \neq 0$, v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers deux réels ℓ et ℓ'. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ alors $\ell \leqslant \ell'$.

Ce théorème est faux pour les inégalités strictes : si $(u_n) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ et (v_n) est la suite constante égale à 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < v_n$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers un réel strictement positif.
Alors (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.

Théorème (limite finie par encadrement)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ avec (u_n) et (v_n) convergeant vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors (w_n) converge vers ℓ.

Théorème (limite infinie par minoration ou majoration)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant $v_n \geqslant u_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

1.4 Suites monotones et suites adjacentes

Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite réelle.
Si (u_n) est monotone alors (u_n) admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Plus précisément [19]

• si (u_n) est croissante et majorée (respectivement croissante et non majorée), (u_n) est convergente (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$) ;

• si (u_n) est décroissante et minorée (respectivement décroissante et non minorée), (u_n) est convergente (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Définition

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$;
- (u_n) et (v_n) sont convergentes et convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

1.5 Traductions séquentielles

Théorème

Si A est une partie non vide et majorée (respectivement non vide et minorée) de $\mathbb{R}$ alors il existe une suite d'éléments de A convergeant vers la borne supérieure de A (respectivement la borne inférieure de A).

Si A est une partie non vide et non majorée (respectivement non vide et non minorée) de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite d'éléments de A de limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si A rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ c'est-à-dire si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un point de A [20].

19. L'hypothèse d'une suite *réelle* est capitale car ce théorème devient faux par exemple avec une suite de rationnels, qui même décroissante et minorée, ne converge pas nécessairement vers un rationnel. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$. Cette suite de rationnels est décroissante et minorée par 0 mais ne converge pas vers un rationnel mais vers l'irrationnel $\sqrt{2}$.

20. On peut aussi dire plus simplement : A est *dense* dans $\mathbb{R}$ si entre deux réels distincts, il existe au moins un point de A.

Théorème

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |x - a| < \varepsilon$.

(iii) Pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Théorème

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ [21] sont denses dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, on peut toujours trouver un réel entre deux rationnels (ou entre deux irrationnels) distincts.

1.6 Extension aux suites complexes

Définition

Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle *suite complexe* [22] toute application

$$u : \left\{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N\right\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Comme pour les suites réelles, on prendra $N = 0$ sachant que tous les résultats s'adaptent au cas général.

L'ensemble des suites complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition

Soit (u_n) une suite complexe.
On dit que (u_n) admet [23, 24] une *limite* $\ell \in \mathbb{C}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Comme pour les suites réelles, l'unicité de la limite éventuelle est assurée.

Une suite complexe (u_n) converge donc vers $\ell \in \mathbb{C}$ si la suite réelle $\big(|u_n - \ell|\big)$ converge vers 0.

21. $\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux c'est-à-dire l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{p}{10^n}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
22. On emploie aussi l'expression *suite de complexes*.
23. ou *converge vers* ou encore *tend vers*. Ces trois expressions synonymes sont à connaître.
24. Sous-entendu en $+\infty$ ou quand n tend vers $+\infty$.

Définition

Soit (u_n) une suite complexe.
On dit (u_n) *converge*[25] si (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$.
On dit qu'elle *diverge*[26] sinon.

Théorème

Soit (u_n) une suite complexe.
Alors (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si, et seulement si, les suites réelles $\big(\mathrm{Re}(u_n)\big)$ et $\big(\mathrm{Im}(u_n)\big)$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.
De plus dans ce cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\mathrm{Re}(u_n)\big) + i \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\mathrm{Im}(u_n)\big)$.

Définition

Soit (u_n) une suite complexe. On dit que (u_n) est *bornée* si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M.$$

Une combinaison linéaire de suites complexes bornées est une suite complexe bornée de même que le produit de deux suites complexes bornées.

Théorème

Toute suite complexe convergente est bornée.

Théorème

Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, (u_n) et (v_n) deux suites complexes convergeant respectivement vers $\ell \in \mathbb{C}$ et $\ell' \in \mathbb{C}$. Alors

- $(\lambda u_n + v_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda\ell + \ell'$;
- $(u_n v_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge[27] et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$;
- si (u_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

25. ou est *convergente*.
26. ou est *divergente*.
27. On montre facilement que comme $\ell' \neq 0$, v_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

1.7 Suites extraites

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On appelle *suite extraite*[28] de (u_n) toute suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Une telle application φ est appelée *extractrice*.

(u_{2n}), (u_{3n}), (u_{n^2}) sont par exemple des suites extraites de (u_n).

Une composée de deux extractrices φ et ψ est une extractrice de sorte que $\left(u_{(\psi\circ\varphi)(n)}\right)$ est une suite extraite de (u_n).

Théorème

Soit φ une extractrice.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$.

Théorème

Soit (u_n) une suite complexe.
Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$, toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Soit (u_n) une suite réelle.
Si (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, toute suite extraite de (u_n) tend vers ℓ.

Corollaire

Soit (u_n) une suite complexe.
Si (u_n) admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes, alors (u_n) diverge.

Soit (u_n) une suite réelle.
Si (u_n) admet deux suites extraites tendant vers des limites (finies ou infinies) distinctes, alors (u_n) diverge.

Ce corollaire est très utile : on montre ainsi aisément la divergence de la suite complexe[29] $(u_n) = \left(j^n\right)$ en considérant les deux suites extraites (u_{3n}) et (u_{3n+1}) convergeant respectivement vers 1 et j.

De même la suite réelle $(u_n) = \left((-1)^n\right)$ diverge car les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1.

28. ou *sous-suite*.
29. j est le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$.

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et convergent vers la même limite alors (u_n) converge.

On a déjà vu que toute suite convergente est bornée et que la réciproque est fausse. On a néanmoins le théorème suivant.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
Si (u_n) est bornée, on peut extraire de (u_n) une sous-suite convergente.

1.8 Suites arithmético-géométriques

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
On dit que (u_n) est *arithmétique* si [30] : $\exists r \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
r est alors appelé la *raison* de la suite (u_n).

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$. Alors [31]

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$;
- Si (u_n) est réelle alors $\begin{cases} \text{si } r = 0,\ (u_n) \text{ est constante} ; \\ \text{si } r > 0,\ (u_n) \text{ est strictement croissante} ; \\ \text{si } r < 0,\ (u_n) \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
On dit que (u_n) est *géométrique* si [32] : $\exists q \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n$.
q est alors appelé [33] la *raison* de la suite (u_n).

30. Il est sous-entendu que $r \in \mathbb{R}$ si (u_n) est une suite réelle et $r \in \mathbb{C}$ si (u_n) est une suite complexe.
31. Plus généralement, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = u_p + (n-p)r$.
32. Il est sous-entendu que $q \in \mathbb{R}$ si (u_n) est une suite réelle et $q \in \mathbb{C}$ si (u_n) est une suite complexe.
33. Si $u_0 = 0$, on ne peut pas parler de *raison* de la suite (u_n) car alors, pour tout $q \in \mathbb{K}$, (u_n) est la suite nulle.

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$. Alors [34]

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$.
- Si (u_n) est réelle alors $\begin{cases} \text{si } q = 1,\ (u_n) \text{ est constante} ; \\ \text{si } q > 1,\ (u_n) \text{ est strictement croissante} ; \\ \text{si } 0 < q < 1,\ (u_n) \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$

Théorème

Soit $(u_n) = \left(q^n\right)$ où $q \in \mathbb{R}$. Alors

- si $q = 1$, (u_n) est constante égale à 1 donc converge vers 1 ;
- si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
- si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;
- si $q \leqslant -1$, (u_n) n'a pas de limite donc diverge.

Théorème

Soit $(u_n) = \left(q^n\right)$ où $q \in \mathbb{C}$. Alors

- si $q = 1$, (u_n) est constante égale à 1 donc converge vers 1 ;
- si $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;
- dans tous les autres cas, (u_n) diverge.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.
On dit que (u_n) est *arithmético-géométrique* si [35]

$$\exists (q, r) \in \mathbb{K}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n + r.$$

Comme pour les suites géométriques et arithmétiques, il existe une formule générale donnant l'expression de (u_n) en fonction de n mais elle n'est pas à retenir.

La méthode pour déterminer u_n en fonction de n dans le cas où (u_n) n'est pas géométrique ($q \neq 1$) est la suivante : on résoud l'équation $a = qa + r$ d'inconnue $a \in \mathbb{K}$ puis on vérifie que la suite $(v_n) = (u_n - a)$ est géométrique de raison q.

34. Plus généralement, si $q \neq 0$, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $u_n = q^{n-p} u_p$.
35. Si $r = 0$, on retrouve la notion de suite géométrique et lorsque $q = 0$, on retrouve celle de suite arithmétique.

1.9 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe

On dit que (u_n) est *récurrente linéaire d'ordre* 2 si [36]

$$\exists (a,b) \in \mathbb{K}^2 \backslash \{(0,0)\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0.$$

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée *équation caractéristique* de (u_n).

Distinguons à présent le cas réel du cas complexe dans les théorèmes qui suivent.

Théorème

Soit (u_n) une suite *réelle* récurrente linéaire d'ordre 2 et notons Δ le discriminant de son équation caractéristique.

• Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 distinctes et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

• Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine réelle r et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r^n.$$

• Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \big((\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big) r^n.$$

Théorème

Soit (u_n) une suite *complexe* récurrente linéaire d'ordre 2 et notons Δ le discriminant de son équation caractéristique.

• Si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes r_1 et r_2 distinctes et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

• Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine complexe r et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r^n.$$

36. On suppose dans cette définition que $(a,b) \neq (0,0)$ car sinon, (u_n) est la suite nulle dès que $n \geqslant 2$.

1.10 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

On dit que I est *stable* par f si $f(I) \subset I$ c'est-à-dire si

$$\forall x \in I, f(x) \in I.$$

On dit que $x \in I$ est un *point fixe* de f si $f(x) = x$.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.
Si I est stable par f, il existe une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = a \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

Le théorème qui suit rassemble les propriétés à connaître sur la monotonie et la limite éventuelle de ce type de suites.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ tels que I est stable par f et (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

• Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant x$ (respectivement $f(x) \leqslant x$), (u_n) est croissante (respectivement décroissante).

• Si f est croissante sur I, (u_n) est monotone[37].

• Si f est décroissante sur I, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones[38].

• Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ alors ℓ est un point fixe de f.

37. Plus précisément, si $u_0 \leqslant u_1$, (u_n) est croissante et si $u_0 \geqslant u_1$, (u_n) est décroissante.
38. et de sens de variations contraires. Plus précisément, si $u_0 \leqslant u_2$, (u_{2n}) croissante et (u_{2n+1}) décroissante, et si $u_0 \geqslant u_2$, (u_{2n}) décroissante et (u_{2n+1}) croissante.

Fonctions numériques d'une variable réelle | 2

Ce chapitre aborde l'étude des fonctions numériques [1] d'une variable réelle, plus précisément des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

À partir de la section 3, les fonctions sont définies sur un intervalle [2] de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont d'abord, dans la première section, à valeurs réelles. La seconde section propose d'étendre certaines des notions à des fonctions à valeurs complexes. Par la suite, sauf cas particuliers [3], les fonctions seront à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Rappels du vocabulaire usuel sur les fonctions

Soit X une partie non vide [4] de $\mathbb{R}$.

On dira par la suite que f est une fonction *de* X vers $\mathbb{K}$ si f est *définie* sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ c'est-à-dire, pour tout $x \in X$, $f(x)$ est définie [5] et $f(x) \in \mathbb{K}$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on parle de *fonction réelle* (respectivement *fonction complexe*).

Lorsque f est une fonction de X vers $\mathbb{K}$, on emploiera parfois la notation

$$f : X \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{ou} \quad f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

1. Le terme *numérique* fait référence à l'espace d'arrivée en l'occurrence $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Le programme officiel de MPSI restreint l'étude des notions de ce chapitre à des intervalles, sachant que ces notions s'étendent à des ensembles qui ne sont pas nécessairement des intervalles mais des parties quelconques de $\mathbb{R}$ non vides et non réduit à un point.
3. comme par exemple les paragraphes énonçant les principaux théorèmes sur la continuité ou la dérivabilité.
4. Toutes les parties de $\mathbb{R}$ de cette section seront considérées comme non vide.
5. Autrement dit, le *domaine de définition* de f est X.

Définition

Soient $\big(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\big)$ un répère du plan, X une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de X vers $\mathbb{R}$. On appelle *graphe*[6] de f la courbe du plan d'équation $y=f(x)$ c'est-à-dire l'ensemble noté Γ_f ou C_f défini par[7]

$$\Gamma_f=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\in X \text{ et } y=f(x)\big\}.$$

Définition

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, A une partie de X et f une fonction de X vers $\mathbb{K}$. On appelle *restriction* de f à A la fonction de A vers $\mathbb{K}$, notée $f_{|A}$, définie par

$$\forall x\in A,\ f_{|A}(x)=f(x).$$

On appelle *prolongement* (ou *extension*) de f à $Y\supset X$ toute fonction g de Y vers $\mathbb{K}$ vérifiant

$$\forall x\in X,\ g(x)=f(x).$$

Définition

Soient $\lambda\in\mathbb{K}$, X une partie de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions de X vers $\mathbb{K}$. Alors $\lambda f+g$ et fg sont deux fonctions de X vers $\mathbb{K}$ définies pour tout $x\in X$ par $(\lambda f+g)(x)=\lambda f(x)+g(x)$ et $(fg)(x)=f(x)g(x)$.

Définition

Soient X et Y deux parties de $\mathbb{R}$, f une fonction de X vers $\mathbb{R}$ telle que[8] $f(X)\subset Y$ et g une fonction de Y vers $\mathbb{K}$.
Alors $g\circ f$ est une fonction de X vers $\mathbb{K}$ définie pour tout $x\in X$ par

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big).$$

Définition

Soient $T\in\mathbb{R}_+^*$, X une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de X vers $\mathbb{K}$.
On dit que f est *paire* si, pour tout $x\in X$, $-x\in X$ et $f(-x)=f(x)$.
On dit que f est *impaire* si, pour tout $x\in X$, $-x\in X$ et $f(-x)=-f(x)$.
On dit que f est *T-périodique* si, pour tout $x\in X$, $x+T\in X$, $x-T\in X$ et $f(x+T)=f(x)$. On dit alors que T est une période[9] de f.

6. ou *courbe représentative* de f.
7. noté aussi $\Gamma_f=\Big\{\big(x,f(x)\big);\ x\in X\Big\}$.
8. Lorsque $f(X)\subset Y$, on dit que f est *à valeurs dans* Y.
9. En général T n'est pas unique sauf si par exemple f est continue et non constante sur X.

Théorème

Soient $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère du plan, X une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de X vers $\mathbb{R}$.

• Si f est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• Si f est impaire, son graphe est symétrique par rapport à O.

Définition

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de X vers $\mathbb{R}$.
On dit que f est *croissante* si : $\forall (x,y) \in X^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
On dit que f est *décroissante* si : $\forall (x,y) \in X^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
On dit que f est *monotone* si f est croissante ou décroissante.

Les définitions de f strictement croissante (respectivement décroissante) s'obtiennent en remplaçant dans chacune des définitions ci-dessus les inégalités larges par des inégalités strictes.

Définition

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction de X vers $\mathbb{R}$.
On dit que f est *majorée* si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ f(x) \leqslant M$.
Le réel M est alors appelé un *majorant* de f.
On dit que f est *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in X,\ f(x) \geqslant m$.
Le réel m est alors appelé un *minorant* de f.
On dit que f est *bornée* si f est majorée et minorée [10].

Définition

Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $a \in X$ et f une fonction de X vers $\mathbb{R}$.

On dit que f admet un *maximum en a* si, pour tout $x \in X$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Le réel $f(a)$ est alors appelé le *maximum de f*, noté $\max\limits_{x \in X} f(x)$ ou $\max\limits_{X} f$.

On dit que f admet un *minimum en a* si, pour tout $x \in X$, $f(x) \geqslant f(a)$.

Le réel $f(a)$ est alors appelé le *minimum de f*, noté $\min\limits_{x \in X} f(x)$ ou $\min\limits_{X} f$.

10. On montre aisément que f bornée équivaut à $|f|$ majorée.

2.2 Compléments sur les fonctions usuelles

Les fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ (où $x \in \mathbb{R}_+^*$), exponentielle, logarithme népérien et trigonométriques sin, cos et tan sont supposées connues [11].

Définition (fonction partie entière)

On appelle fonction *partie entière* la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

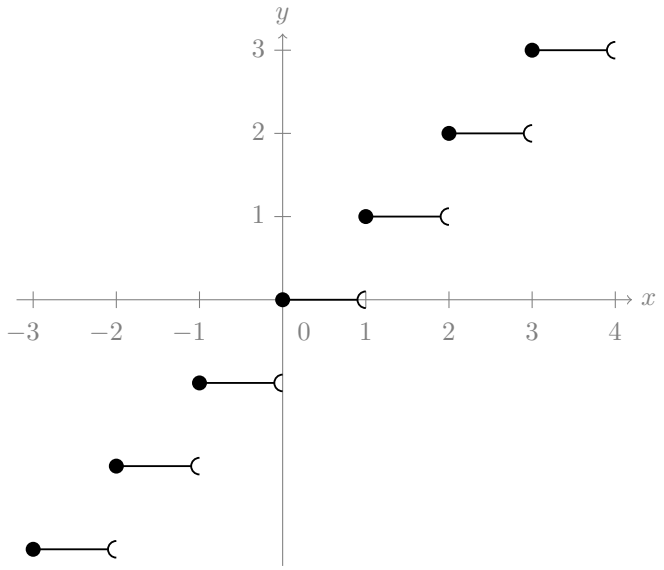
La partie entière d'un réel x sera notée $\lfloor x \rfloor$.

Par exemple, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Théorème (caractérisation de la partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$;
- $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier relatif tel que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.



11. On trouvera les formules trigonométriques usuelles page 414.

Définition (fonctions hyperboliques)

On appelle *sinus hyperbolique*, notée sh, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

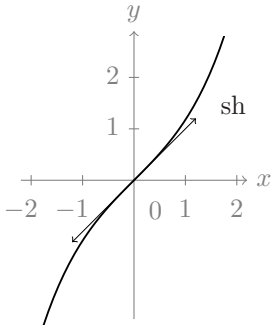
$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

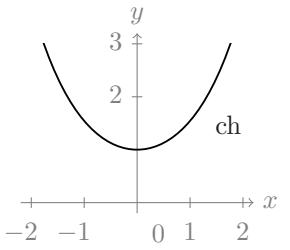
On appelle *cosinus hyperbolique*, notée ch, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

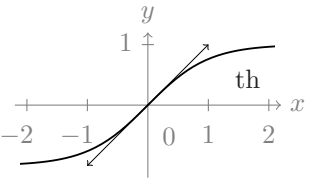
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On appelle *tangente hyperbolique*, notée th, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$







Théorème (propriétés des fonctions hyperboliques)

- La fonction sh est impaire, croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

- La fonction ch est paire, croissante sur $\mathbb{R}_+$, décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}(x).$$

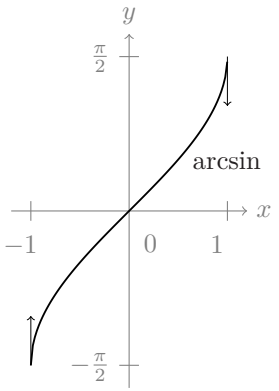
- La fonction th est impaire, croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

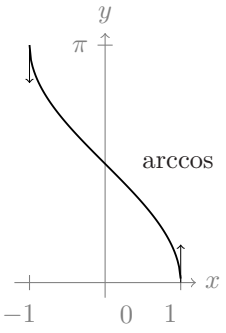
$$(\mathrm{th})'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

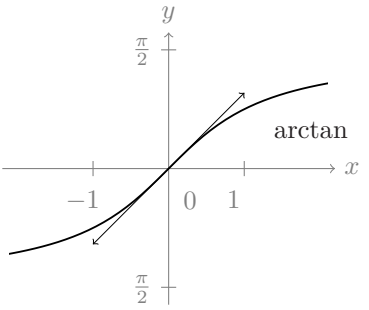
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Définition (fonctions réciproques des fonctions trigonométriques)

La fonction sinus est bijective de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée[12] *arcsinus* et notée arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
La fonction cosinus est bijective de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque est appelée *arccosinus* et notée arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.
La fonction tangente est bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée *arctangente* et notée arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.







Théorème (propriétés de la fonction arcsinus)

• $\arcsin(0) = 0$, $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

• La fonction arcsinus est impaire, croissante sur $[-1, 1]$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

• $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in [-1, 1],\ \sin\big(\arcsin(x)\big) = x. \\ \text{Pour tout } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin\big(\sin(x)\big) = x. \end{cases}$

12. Le nom *arcsinus* vient du fait que $\arcsin(x)$ est l'arc de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus est x.

Théorème (propriétés de la fonction arccosinus)

- $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ et $\arccos(1) = 0$.
- La fonction arccosinus est décroissante sur $[-1, 1]$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in [-1, 1],\ \cos\big(\arccos(x)\big) = x. \\ \text{Pour tout } x \in [0, \pi],\ \arccos\big(\cos(x)\big) = x. \end{cases}$
- Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

Théorème (propriétés de la fonction arctangente)

- $\arctan(0) = 0$, $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, $\arctan\big(\sqrt{3}\big) = \frac{\pi}{3}$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
- La fonction arctangente est impaire, croissante sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \tan\big(\arctan(x)\big) = x. \\ \text{Pour tout } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x. \end{cases}$

2.3 Limite d'une fonction en un point

Définition

On appelle[13, 14, 15] *segment* de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, b]$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On appelle *intervalle* de $\mathbb{R}$, toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (a, b) \in I^2 \text{ tel que } a \leqslant b,\ [a, b] \subset I.$$

13. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le singleton $\{a\}$ est considéré comme un segment réduit à un point.
14. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}$.
15. Dans toute la suite, dans l'écriture $[a, b]$, il est sous-entendu que $a \leqslant b$ de sorte que par exemple l'écriture $[1, 0]$ sera proscrite.

Mis à part $\mathbb{R}$ et $\emptyset$, si a et b sont deux réels, tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'une des formes suivantes :

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x < b\}\ ;\ [a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a\}\ ;$$
$$]a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leqslant b\}\ ;\ ]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leqslant b\}\ ;$$
$$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\}\ ;\ ]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}\ ;$$
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqslant x \leqslant b\}\ ;\ ]a,b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}.$$

Définition

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On dit qu'un intervalle[16] de $\mathbb{R}$ est *ouvert* s'il est de la forme $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,b[$, $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$.
On dit qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est *fermé* s'il est de la forme $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$.
On dit qu'un intervalle de $\mathbb{R}$ est *semi-ouvert* s'il est de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$.

Définition

On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage d'un réel a* s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que[17] $]a-\alpha,a+\alpha[\subset V$.
On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de $+\infty$* s'il existe un réel A tel que $]A,+\infty[\subset V$.
On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage de $-\infty$* s'il existe un réel A tel que $]-\infty,A[\subset V$.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que[18] $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ est un *point adhérent*[19] à I si[20] tout voisinage de a rencontre I c'est-à-dire si tout voisinage de a contient au moins un point de I.
On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un *point intérieur* de I si[21] I est un voisinage de a c'est-à-dire s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha,a+\alpha[\subset I$.

16. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont à la fois ouverts et fermés.
17. En particulier, pour tout réel $\alpha > 0$, $]a-\alpha,a+\alpha[$ est un voisinage de a.
18. $\mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ se note aussi $\overline{\mathbb{R}}$ et est appelé *droite numérique achevée*.
19. La notion de *point adhérent* n'est pas indispensable à la compréhension de ce chapitre. Elle n'interviendra donc qu'en notes de bas de page.
20. $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ *adhérent à I* signifie en termes simples que a est un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I.
21. *a point intérieur de I* signifie en termes simples que a est un point de I mais pas une extrémité de I.

Par exemple $+\infty$ et 0 sont adhérents à $]0,+\infty[$. 1 n'est pas un point intérieur de $[0,1]$, ni de $[0,1[$ mais tout réel $x \in]0,1[$ est un point intérieur de $[0,1]$.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

1. Soit [22] a un point de I ou une extrémité finie de I.
   On dit que f admet une *limite finie* en a si
   $$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \alpha \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$
2. On dit que f admet une *limite finie* en $+\infty$ si
   $$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > A \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$
   On dit que f admet une *limite finie* en $-\infty$ si
   $$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x < A \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon.$$

Ainsi, dire que f admet une limite en a signifie : il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que l'écart entre $f(x)$ et ℓ peut être rendu aussi petit que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a. La première définition ci-dessus peut également s'écrire de manière équivalente de la façon suivante :

$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ x \in]a-\alpha, a+\alpha[\Longrightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

1. Soit a un point de I ou une extrémité finie de I.
   On dit que f *tend vers* $+\infty$ en a si [23]
   $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \alpha \Longrightarrow f(x) > A.$$
2. On dit que f *tend vers* $+\infty$ en $+\infty$ si [24]
   $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x > B \Longrightarrow f(x) > A.$$
   On dit que f *tend vers* $+\infty$ en $-\infty$ si
   $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x < B \Longrightarrow f(x) > A.$$

Une fonction f peut donc admettre une limite finie ou infinie en a mais aussi ne pas avoir de limite (cf. exemple page 39).

22. On pourrait aussi dire : soit a un réel *adhérent* à I.
23. La définition de f *tend vers* $-\infty$ en a est analogue en remplaçant simplement $f(x) > A$ par $f(x) < A$.
24. La définition de f *tend vers* $-\infty$ en $+\infty$ est analogue en remplaçant simplement $f(x) > A$ par $f(x) < A$.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ et a un point [25] de I ou une extrémité finie ou infinie de I. Si f admet une limite finie en a alors celle-ci est unique et sera notée [26] $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et admet une limite finie en a alors $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

1. Soit a un point de I ou une extrémité finie de I.
   On dit que f vérifie une certaine propriété *au voisinage* de a s'il existe $\alpha > 0$ tel que f vérifie cette propriété sur $I \cap]a-\alpha, a+\alpha[$.
2. On dit que f vérifie une certaine propriété *au voisinage* de $+\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie cette propriété sur $I \cap]A, +\infty[$.
   On dit que f vérifie une certaine propriété *au voisinage* de $-\infty$ s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie cette propriété sur $I \cap]-\infty, A[$.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ et a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I.
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ et a un point de I ou une extrémité finie de I.

1. On dit que f admet une *limite finie à gauche* en a si [27]
   $$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ a-\alpha < x < a \Longrightarrow \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon.$$
   Elle sera alors notée $\lim\limits_{a^-} f$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ ou encore $f\big(a^-\big)$.
2. On dit que f admet une *limite finie à droite* en a si [28]
   $$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ a < x < a+\alpha \Longrightarrow \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon.$$
   Elle sera alors notée $\lim\limits_{a^+} f$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou encore $f\big(a^+\big)$.

25. On peut aussi dire : soit a un point de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ adhérent à I.
26. Si ℓ désigne cette limite, on écrira également $f \underset{a}{\to} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
27. Autrement dit : la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ admet une limite finie en a.
28. Autrement dit : la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ admet une limite finie en a.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ et a un point de I ou une extrémité finie de I.

1. On suppose que f est définie en a. Alors f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a si, et seulement si, f admet une limite finie à gauche et à droite en a égales à $f(a)$.
2. On suppose que f n'est pas définie en a. Alors f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ en a si, et seulement si, f admet une limite finie à gauche et à droite en a égales à ℓ.

Donnons deux exemples de ce théorème.

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$.

On a $f(0) = 1$ et des limites à droite et à gauche de f en 0 égales à $0 \neq f(0)$. Donc f n'a pas de limite en 0. D'autre part, g n'est pas définie en 0, admet des limites à gauche et à droite égales à 1 donc g admet 1 comme limite en 0.

Théorème (caractérisation séquentielle de la limite)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{R}$, a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

(ii) Pour toute suite (x_n) de I convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers ℓ.

Théorème (combinaison linéaire, produit et quotient des limites)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I, $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$ admettant des limites finies ℓ et ℓ' en a. Alors

- $\lambda f + g$ admet une limite finie en a et $\lim\limits_a (\lambda f + g) = \lambda \ell + \ell'$;
- fg admet une limite finie en a et $\lim\limits_a fg = \ell\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, $\frac{f}{g}$ admet [29] une limite finie en a et $\lim\limits_a \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'}$.

29. On montre facilement que comme $\ell' \neq 0$, g ne s'annule pas au voisinage de a.

Théorème (composition des limites)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$, g une fonction de J vers $\mathbb{R}$, a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I. Si $\lim\limits_a f = b$ alors

- b est un point de J ou une extrémité finie ou infinie de J ;
- si $\lim\limits_b g = \ell$ alors $\lim\limits_a (g \circ f) = \ell$.

Énonçons le théorème relatif au passage à la limite dans des inégalités larges.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I, f et g deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$ admettant des limites finies ℓ et ℓ' en a.

Si au voisinage de a, $f \leqslant g$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Ce théorème devient faux pour les inégalités strictes : on a par exemple pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \frac{1}{x} < 1$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ n'est pas strictement inférieure à 1.

Théorème (limite finie par encadrement)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I, f, g et h trois fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

Si[30] au voisinage de a, $f \leqslant h \leqslant g$ avec $\lim\limits_a f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_a g = \ell$ alors $\lim\limits_a h = \ell$.

Théorème (limite infinie par minoration ou majoration)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I, f et g deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$ vérifiant $g \geqslant f$ au voisinage de a.

- Si $\lim\limits_a f = +\infty$ alors $\lim\limits_a g = +\infty$.
- Si $\lim\limits_a g = -\infty$ alors $\lim\limits_a f = -\infty$.

30. L'hypothèse sera le plus souvent : pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ mais cette inégalité seulement au voisinage de a est suffisante pour aboutir à la conclusion.

Théorème de la limite monotone

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et f une fonction de $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$ monotone. Alors

- $\lim\limits_{a} f$ et $\lim\limits_{b} f$ existent et sont finies ou infinies [31] ;
- pour tout $c \in]a, b[$, $\lim\limits_{c^-} f$ et $\lim\limits_{c^+} f$ existent et

$$\lim_{c^-} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^+} f \quad \text{si } f \text{ est croissante}$$

$$\lim_{c^+} f \leqslant f(c) \leqslant \lim_{c^-} f \quad \text{si } f \text{ est décroissante.}$$

2.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{C}$ et a un point de I ou une extrémité finie de I.
On dit que f admet une *limite* finie $\ell \in \mathbb{C}$ en a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \Longrightarrow \big|f(x) - \ell\big| < \varepsilon.$$

L'unicité de cette éventuelle limite se démontre de la même manière que le cas d'une fonction à valeurs réelles.

De même, on peut étendre la notion de limite en $+\infty$ et $-\infty$ avec exactement la même définition que pour les fonctions à valeurs réelles à ceci près que $\big|f(x) - \ell\big|$ désigne désormais le module de $f(x) - \ell$.

En revanche, la notion de limite infinie n'a plus de sens dans $\mathbb{C}$.

Lorsque f est une fonction de I vers $\mathbb{C}$, on définit les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ de I vers $\mathbb{R}$ pour tout $x \in I$ par

$$\big(\mathrm{Re}(f)\big)(x) = \mathrm{Re}\big(f(x)\big) \quad \text{et} \quad \big(\mathrm{Im}(f)\big)(x) = \mathrm{Im}\big(f(x)\big).$$

Ces deux nouvelles fonctions à valeurs réelles vérifient : $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$.

31. Plus précisément, dans le cas par exemple d'une fonction f croissante, $\lim\limits_{a} f$ est finie (et égale à la borne inférieure de f sur $]a, b[$) si f est minorée et égale à $-\infty$ sinon ; $\lim\limits_{b} f$ est finie (et égale à la borne supérieure de f sur $]a, b[$) si f est majorée et égale à $+\infty$ sinon. Ce théorème est en fait l'analogue pour les fonctions du *théorème de la limite monotone* pour les suites : toute suite réelle croissante (respectivement décroissante) et majorée (respectivement minorée) converge.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{C}$ et a un point de I ou une extrémité finie ou infinie de I.

Alors $\lim\limits_a f = \ell \in \mathbb{C}$ si, et seulement si, $\begin{cases} \lim\limits_a \mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(\ell) \\ \lim\limits_a \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$

On peut également étendre la notion de fonction bornée d'une fonction f de I vers $\mathbb{C}$ de la façon suivante : f est *bornée* sur I si

$$\exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in I,\ \big|f(x)\big| \leqslant K.$$

avec $\big|f(x)\big|$ qui désigne désormais le module de $f(x)$.

Comme pour le cas d'une fonction à valeurs réelles, toute fonction d'un intervalle I à valeurs complexes admettant une limite finie en un point a de I (ou une extrémité finie ou infinie de I) est bornée au voisinage de a.

Les notions de limite à gauche et à droite sont également étendues de même que la caractérisation séquentielle de la limite.

2.5 Continuité

À partir de maintenant, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{K}$ et $a \in I$. On dit que[32] f est *continue en* a si $\lim\limits_a f = f(a)$ c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| < \alpha \Longrightarrow \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

On dit que f est *continue sur* I si f est continue en tout point de I.

Contrairement à la définition de la limite d'une fonction f de I vers $\mathbb{K}$ en un point a où a n'est pas nécessairement un point de I, la notion de continuité en un point a n'a pas de sens si ce point n'est pas dans I.

En vertu du théorème page 38, on pourrait simplement donner comme définition de la continuité de f, l'existence d'une limite finie de f en a.

32. Il existe des fonctions qui ne sont continues en aucun point de $\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple de la *fonction caractéristique de* $\mathbb{Q}$, appelée également *fonction de Dirichlet* et notée parfois $1_{\mathbb{Q}}$, définie par : $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{C}$ et $a \in I$.
Alors f est *continue en a* (respectivement sur I) si, et seulement si, les fonctions à valeurs réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a (respectivement sur I).

Définition (prolongement par continuité)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel n'appartenant pas à I et f une fonction de I vers $\mathbb{K}$.

On dit que f est *prolongeable par continuité en a* si $\lim\limits_{a} f$ existe et est finie.

On définit alors le *prolongement* $\widetilde{f}$ de f, continu sur $I \cup \{a\}$, défini par

$$\widetilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{a} f & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ définie sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ se prolonge par continuité en 0 car $\lim\limits_{0} f = 1$.

Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I vers $\mathbb{K}$ et $a \in I$.

On dit que f est *continue à gauche en a* si $\lim\limits_{a^-} f = f(a)$.

On dit que f est *continue à droite en a* si $\lim\limits_{a^+} f = f(a)$.

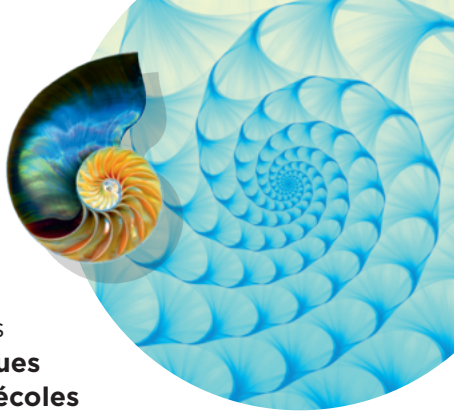
Par exemple la fonction *partie entière*[33] est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1 car $\lfloor 1 \rfloor = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0 \neq \lfloor 1 \rfloor$.

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I et f une fonction de I vers $\mathbb{K}$. Alors f est continue en a si, et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

Donnons à présent la caractérisation séquentielle de la continuité en un point.

33. On rappelle que la fonction *partie entière*, notée $\lfloor \cdot \rfloor$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Elle vérifie en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.



Enrichi par des **résumés de cours,** ce formulaire sera d'une aide précieuse pour l'étudiant souhaitant s'assurer de l'assimilation des **nouveaux programmes de mathématiques des classes préparatoires aux grandes écoles** comme ceux des **deux premières années de Licences scientifiques.**
Il s'avérera également très utile aux **candidats au Capes de mathématiques.**

Le livre est divisé en trois parties : analyse, algèbre et probabilités. Un **index détaillé** permet à l'étudiant de trouver immédiatement l'information recherchée. En fin d'ouvrage sont rassemblés un formulaire de trigonométrie, les dérivées et primitives usuelles ainsi que les développements limités et les développements en séries entières classiques. Remarques, exemples et contre-exemples, viennent compléter l'ensemble.

Les auteurs

Olivier Rodot est directeur du département de mathématiques des classes préparatoires de l'EPITA, école d'ingénieurs en informatique.

Jean-Étienne Rombaldi a enseigné à l'université Grenoble-Alpes. Il a été préparateur et membre du jury du Capes externe et de l'agrégation interne de mathématiques.

ISBN : 978-2-8073-3988-0

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo