

Gérald Tenenbaum

en collaboration avec

Jie Wu

Théorie analytique  
et probabiliste des nombres  
313 exercices corrigés



Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayant cause, est illicite et constitue une contrefaçon, aux termes des articles L.335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Maquette intérieure et couverture : RédacNet - [www.redacnet.com](http://www.redacnet.com)

Illustration de couverture: © Gregor Reisch, *Allégorie de l'Arithmétique*, in *Margarita Philosophica* (1504)

Éditions Le voile des mots  
102, rue Saint-Dizier, 54000 Nancy  
[www.voiledesmots.editions.free.fr](http://www.voiledesmots.editions.free.fr)

Dépôt légal avril 2024  
Achevé d'imprimer en avril 2024.

© Voile des mots éditions, 2024  
ISBN: 978-2-9587374-8-1  
Tous droits réservés

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> .....	7
<b>Notations</b> .....	9
<b>Tome I : Méthodes élémentaires</b> .....	13
Chapitre I.0. Quelques outils d'analyse réelle .....	15
<i>Solutions</i> .....	19
Chapitre I.1. Les nombres premiers .....	25
<i>Solutions</i> .....	31
Chapitre I.2. Fonctions arithmétiques .....	41
<i>Solutions</i> .....	43
Chapitre I.3. Ordres moyens .....	47
<i>Solutions</i> .....	55
Chapitre I.4. Méthodes de crible .....	69
<i>Solutions</i> .....	73
Chapitre I.5. Ordres extrémaux .....	81
<i>Solutions</i> .....	85
Chapitre I.6. La méthode de van der Corput .....	91
<i>Solutions</i> .....	97
Chapitre I.7. Approximation diophantienne .....	105
<i>Solutions</i> .....	111
<b>Tome II : Méthodes d'analyse complexe</b> .....	120
Chapitre II.0. La fonction Gamma d'Euler .....	121
<i>Solutions</i> .....	125
Chapitre II.1. Fonctions génératrices : séries de Dirichlet .....	135
<i>Solutions</i> .....	141

Chapitre II.2. Formules de sommation .....	149
<i>Solutions</i> .....	151
Chapitre II.3. La fonction zêta de Riemann .....	153
<i>Solutions</i> .....	161
Chapitre II.4. Le théorème des nombres premiers et l'hypothèse de Riemann .....	173
<i>Solutions</i> .....	175
Chapitre II.5. La méthode de Selberg–Delange .....	179
<i>Solutions</i> .....	185
Chapitre II.6. Deux applications arithmétiques .....	199
<i>Solutions</i> .....	203
Chapitre II.7. Théorèmes taubériens .....	207
<i>Solutions</i> .....	211
Chapitre II.8. Nombres premiers en progressions arithmétiques .....	219
<i>Solutions</i> .....	225
<b>Tome III : Méthodes probabilistes</b> .....	233
Chapitre III.1. Densités .....	235
<i>Solutions</i> .....	239
Chapitre III.2. Loi de répartition d'une fonction arithmétique .....	245
<i>Solutions</i> .....	249
Chapitre III.3. Ordre normal .....	259
<i>Solutions</i> .....	265
Chapitre III.4. Fonctions additives et multiplicatives .....	283
<i>Solutions</i> .....	289
Chapitre III.5. Entiers friables. La méthode du col .....	301
<i>Solutions</i> .....	305
Chapitre III.6. Entiers sans petit facteur premier .....	317
<i>Solutions</i> .....	321
Index .....	349

# Avant-propos

Ce fascicule a pour principal objet de fournir l'intégralité des solutions des 313 exercices du livre *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, paru en 2022 aux éditions Dunod. Une première version de cet ouvrage, écrite sous l'impulsion de Jie Wu, qui avait entrepris ce travail dès sa nomination à Nancy, était relative au volume 1 de la collection des *Cours spécialisés* de la Société mathématique de France. Elle comprenait donc les solutions des 182 exercices de cet ouvrage. Ils sont pour la plupart repris dans le présent fascicule.

Ainsi qu'il a été souligné dans la monographie dont ils sont issus, ces exercices correspondent à la double motivation de mettre en œuvre les notions fondamentales introduites dans l'exposé, et d'initier le lecteur à la recherche en théorie analytique des nombres. Cela a naturellement induit une rédaction des solutions plus succincte pour les exercices du premier type, plus développée pour ceux du second.

Pour la commodité du lecteur, la subdivision en tomes et chapitres a été conservée, et les énoncés sont reproduits. De même, et bien que les citations soient ici beaucoup moins nombreuses, la bibliographie du premier volume est reprise *in extenso*, mise à jour si nécessaire. Elle est également enrichie des références propres aux solutions.

Les exercices de ce fascicule ont été conçus comme partie intégrante du traité général. Sauf en de rares exceptions, les énoncés sont cependant compréhensibles de façon autonome. À cette fin, la section préliminaire de notations a été largement développée. Il reste que la rédaction des solutions renvoie librement, sans décodage des références, au texte du traité, tant pour l'utilisation de théorèmes que pour celle de formules isolées ou de principes de démonstrations. Il n'aurait pas été possible de procéder autrement sauf à augmenter déraisonnablement, par de fastidieuses redites, les dimensions du présent travail. Il est à noter que les numéros de formules des énoncés sont repris de celles du traité.

Jie Wu se joint à moi pour exprimer notre gratitude à Régis de la Bretèche, Kévin Destagnol, Sary Drappeau, Armand Lachand et Bruno Martin, qui nous ont fait l'amitié de vérifier certains chapitres et de proposer d'heureuses modifications.

Nancy, Mars 2024,

G.T.